Я. И. АЙЗЕНШТАТ и Б. Г. БЕЛОЦЕРКОВСКАЯ

Решение задач по тригонометрии

УЧПЕДГИЗ • 1960

• РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ •

Я. И. АЙЗЕНШТАТ и Б. Г. БЕЛОЦЕРКОВСКАЯ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1960

Яков Иосифович Айзенштат
Бася Григорьевна Белоцерковская
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ
Редактор *С. В. Пазельский*
Обложка художника *И. Г. Николаевцева*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Р. К. Куркина*

* * *

Сдано в набор 12/III-1960 г. Подписано к печати 14/XII-1960 г.
$84\times108^{1}/_{32}$. Печ. л. 16 (13,12). Уч.-изд. л. 11,82.
Тираж 50 тыс. экз. А12153.

* * *

Учпедгиз. Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза,
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Заказ № 1285.
Цена без переплета 3 р. 20 к., переплет 80 к.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
I. Основные тригонометрические тождества 6
II. Теоремы сложения и их следствия 26
1. Формулы сложения . . . . . —
2. Формулы двойного, тройного и половинного аргумента 33
3. Понижение степени синуса и косинуса 46
4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму 56
5. Преобразование тригонометрических выражений в произведение введением вспомогательного угла 65
III. Основные свойства тригонометрических функций . . . 76
1. Область определения . . . . . —
2. Периодичность 80
3. Четность и нечетность 89
4. Наибольшие и наименьшие значения 92
5. Графики 103
IV. Исключение параметров 108
V. Условные равенства 113
VI. Соотношения между элементами треугольника 127
VII. Задачи на повторение 141
VIII. Применение тригонометрии к решению стереометрических задач. 180
1. Решение стереометрических задач на вычисление . . —
Непосредственное нахождение неизвестных величин . . 181
Нахождение неизвестных величин при помощи составления уравнений 187
1) Введение вспомогательного отрезка 189
2) Введение вспомогательного угла 202
2. Некоторые приемы, упрощающие решение стереометрических задач 225
Выбор положения фигуры . . . . . —
Нахождение некоторых комбинаций неизвестных . . 228
Использование зависимости между углом, образованным наклонной с плоскостью, и углами, образованными наклонной и ее проекцией с прямой на плоскости . . 234
Применение вспомогательных построений 237
Введение вспомогательных неизвестных 243
Нахождение отношений однородных величин 246
3. Исследование стереометрических задач на вычисление 248

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга написана на основании многолетнего опыта работы авторов в средней школе; в ней излагаются вопросы методики решения задач по тригонометрии.

В процессе решения задач не только закрепляются и углубляются теоретические знания, но выдвигаются и изучаются новые математические зависимости и связи, воспитывается логическое мышление учащихся, развивается сообразительность, прививаются практические навыки и умения.

Математические идеи, используемые при решении задач, весьма разнообразны. Однако при решении большинства задач каждого раздела школьного курса тригонометрии используются некоторые основные, ведущие идеи, на базе которых создаются те или иные способы и методы решения задач определенного вида.

Главным в нашем опыте мы считаем именно то, что при решении задач мы выделяем главные идеи, приемы, методы решения основных задач определенного вида. В своей практической работе мы убедились в том, что ясное и четкое формулирование этих идей, разъяснение способов решения задач значительно способствуют математическому развитию учащихся, расширяют их математический кругозор, помогают сознательному и глубокому усвоению теории, создают прочную базу для решения разнообразных сложных задач.

К сожалению, учебники и методическая литература уделяют методике решения задач в школе еще недостаточное внимание. Даже в книгах, содержащих решения задач или указания к решениям, ведущие идеи и методы решения задач не всегда систематизируются и обобщаются, а вопросы методики обучения учащихся решению задач затра-

гиваются еще реже. Таким образом, в выборе способов решения задач учитель иногда ограничивается собственным опытом. Между тем учитель должен в совершенстве владеть как методикой решения разнообразных задач, входящих в программу средней школы, так и основными методами решения задач по элементарной математике вообще.

Авторы полагают, что все виды задач, рассмотренные в книге, должны изучаться в классе со всеми учащимися, но в зависимости от наличия времени и подготовленности класса учителю следует наиболее трудные задачи каждого раздела отнести к внеклассной работе.

Решая ту или иную задачу, авторы обычно старались показать рациональные и интересные способы ее решения, отступая от этого правила в тех случаях, когда данная задача используется для демонстрации какого-либо общего приема, пригодного для решения других, подобных задач; менее рациональные способы решения задач приводятся в книге для сопоставления с более рациональными лишь в тех случаях, когда эти способы (менее рациональные) распространены в литературе или в школьной практике.

Некоторые задачи решаются в книге несколькими способами. Рассмотрение различных способов решения одной и той же задачи и разыскание решения наиболее интересного в идейном или техническом отношении значительно обогащают знания учащихся и способствуют развитию их творческой инициативы.

В книге рассматриваются основные виды задач, встречающиеся в школьном курсе тригонометрии. Некоторые из этих видов задач отсутствовали в задачнике по тригонометрии Н. Рыбкина, но все они содержатся в задачнике П. В. Стратилатова и во всех других новых задачниках по тригонометрии (Р. И. Позойского, А. И. и Н. И. Худобиных); без умения решать эти новые виды задач знания по тригонометрии нельзя считать полноценными.

Рациональному выполнению преобразований тригонометрических выражений также уделяется значительное внимание в книге. Отсутствие навыков в выполнении преобразований простейшим путем и, наоборот, наличие громоздких и утомительных преобразований являются одной из главных причин перегрузки учащихся. Кроме того, быстрое и рациональное выполнение тригонометрических преобразований при изучении тригонометрии и в процессе решения стереометрических задач с применением

тригонометрии дает возможность сэкономить время, которое можно использовать для изучения и углубления теоретических вопросов и решения задач.

В разделе «Применение тригонометрии к решению стереометрических задач» рассматриваются основные способы решения стереометрических задач на вычисление и некоторые приемы, облегчающие решение таких задач; здесь же рассматривается вопрос об исследовании стереометрических задач на вычисление с параметрическими данными. Ответы к задачам по стереометрии обычно даются в таком виде, в каком они даны в книгах, из которых э и задачи взяты.

Значительная часть примеров и задач, приводимых в книге, взята из известных задачников, которыми авторы пользуются в своей работе:

1. П. В. Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1958.

2. Р. И. Позойский, Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1950.

3. А. И. Худобин и Н. И. Худобин, Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1955.

4. Н. Рыбкин, Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1955.

Авторы надеются, что книга окажет помощь учителям в обучении учащихся решению задач. Авторы также надеются, что книга окажется полезной для студентов педагогических вузов, для лиц, готовящихся к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, и для лиц, самостоятельно изучающих тригонометрию.

Авторы выражают глубокую благодарность С. И. Новоселову, Г. А. Назаревскому, Ю. В. Ревзину и Е. Н. Обуховской, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

Отзывы и замечания по книге просим направлять по адресу: Москва, И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Учпедгиз, редакция математики.

I. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА.

При изучении первых восьми основных формул тригонометрии мы считаем, что учащиеся должны научиться вычислять значения тригонометрических функций какого-либо аргумента по данному значению одной из них и приобрести основные навыки в доказательстве тригонометрических тождеств.

Чтобы облегчить учащимся запоминание основных тригонометрических тождеств и ориентировку в них, мы распределяем их на три группы:

1) Формулы квадратов:	2) Формулы деления:	3) Формулы обратных величин:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$	$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1;$
$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1;$	$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$	$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1;$
$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1.$		$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

Такое распределение формул в значительной мере облегчает решение всех шести типов задач на вычисление значений тригонометрических функций какого-либо аргумента, когда известно значение одной из этих функций. При этом получается решение наиболее рациональное, свободное от лишних вычислений и выбора возможных знаков.

Решая подобные задачи, мы советуем учащимся прежде всего обращаться к формулам квадратов, а затем уже к формулам обратных величин и к формулам деления; при этом мы подчеркиваем, что формулами квадратов и формулами деления следует пользоваться только по одному разу.

Пусть, например, требуется вычислить все тригонометрические функции угла α, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$ и $180° < \alpha < 270°$. Из формул квадратов берем ту, которая содержит $\operatorname{tg}\alpha$, а именно $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, получаем: $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{576}{49} = 1$, откуда, учитывая границы для α, находим: $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$.

По формулам обратных величин находим: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$; $\sec\alpha = -\frac{25}{7}$, а по формуле деления $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ имеем: $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{25}\cdot\frac{24}{7} = -\frac{24}{25}$ и, наконец, $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{25}{24}$.

Точно так же поступаем и в том случае, когда требуется все тригонометрические функции в ы р а з и т ь через одну из них. Пусть, например, надо выразить все функции через $\cos\alpha$.

Из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ находим: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; по формуле деления $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ получаем: $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ и, наконец, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$,

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\cos\alpha^*}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Указанный порядок оказывается особенно удобным, если вычислять только 4 функции (как это делается в задачнике П. В. Стратилатова); в этом случае все 4 типа задач решаются путем применения по одному разу формул квадратов, деления и обратных величин. Разумеется, что в некоторых случаях можно получить рациональное решение и отступая от указанного порядка, но, как показал наш опыт, следование этому порядку в начале изучения курса тригонометрии значительно сокращает коли-

---

* Знак + или — следует ставить в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α. Это примечание относится к употреблению знака $\pm$ и в других местах книги.

чество ошибок в вычислениях и, главное, количество нерациональных решений. Мы, например, неоднократно наблюдали, что приведенную выше задачу учащиеся начинали решать так: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{24}{7}$; $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{576}{49}$; $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$ $=\frac{576}{49}$ и т. д.; некоторые учащиеся при решении подобных задач пользуются для вычисления всех функций только формулами квадратов — наиболее сложными формулами.

После решения примеров на нахождение значений тригонометрических функций мы переходим к доказательству тригонометрических тождеств.

В руководстве по преподаванию тригонометрии С. И. Новоселов раскрыл причины затруднений, которые испытывают учащиеся при доказательстве тригонометрических тождеств, и указал основные приемы, дающие возможность уменьшить эти трудности (устное решение примеров; учить находить и выделять выражения, входящие в основные тождества).

Некоторые учителя и методисты рекомендуют обучать искусству доказывать тождества «методом обучения плаванию путем сталкивания в воду». Мы убедились, что подобная методика в практике школы фактически не применяется, ибо она приводит к тому, что слабые и средние учащиеся совсем не умеют доказывать тригонометрические тождества, а сильные учащиеся если и умеют, то это им достается дорогой ценой и с большим опозданием. Нам даже трудно себе представить, чтобы в самом начале изучения предмета, когда у учащихся отсутствуют какие-либо навыки в преобразованиях тригонометрических выражений, учитель становился в роль наблюдателя, предоставляя учащимся «барахтаться в воде».

В своей практической работе мы сопровождаем доказательство тригонометрических тождеств (в начале курса тригонометрии) определенными указаниями. При дальнейшем изучении тригонометрии некоторые из этих указаний уточняются, дополняются. Мы убедились в том, что знакомство с этими указаниями помогает не только слабым учащимся, но и учащимся, хорошо выполняющим алгебраические преобразования.

Сначала следует доказывать такие тождества, в которых можно сразу увидеть и выделить основные комбинации.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$;

б) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Р е ш е н и е. а) Функция $\operatorname{tg}\alpha$, входящая в левую часть тождества, теряет смысл при $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, при этих же значениях аргумента α функция $\cos\alpha$ обращается в нуль, и тогда $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ также теряет смысл. Таким образом, допустимые значения аргумента α определяются таким неравенством: $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Выделяя основные комбинации в левой части тождества, находим:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

б) Чтобы $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не теряли смысла, надо исключить значение $\alpha = k\cdot\frac{\pi}{2}$. Неравенство $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ определяет допустимые значения аргумента α, ибо при этих значениях выполняются также неравенства: $1-\sin^2\alpha \neq 0$; $\cos\alpha \neq 0$.

Выделяя основные комбинации, находим:

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Но далеко не всегда можно сразу увидеть и выделить основные комбинации. Иногда это удается сделать после выполнения некоторых алгебраических преобразований.

Пример 2. Доказать тождества:

а) $\cos^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$;

б) $(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2 + (1+\operatorname{ctg}\alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2\alpha}$;

в) $3(\sin^4\beta + \cos^4\beta) - 2(\sin^6\beta + \cos^6\beta) = 1$.

Р е ш е н и е. а) Вынесение общего множителя $\cos^2\beta$ за скобки в первых двух слагаемых левой части тождества дает:

$$\cos^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\beta = \cos^2\beta(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin^2\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Тождество имеет место при произвольном α.

б) Выполняя возвышение в степень в левой части тождества и группируя слагаемые, находим:

$$(1-\operatorname{ctg}\alpha)^2+(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2=1-2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1+$$
$$+2\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=\frac{2}{\sin^2\alpha}.$$

Левая часть тождества теряет смысл, когда теряет смысл $\operatorname{ctg}\alpha$, а правая часть теряет смысл при $\sin\alpha=0$. Допустимые значения аргумента: $\alpha\neq k\pi$.

в) Раскладывая $\sin^6\beta+\cos^6\beta$ на множители (как сумму кубов), находим:

$$3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-2(\sin^6\beta+\cos^6\beta)=3(\sin^4\beta+\cos^4\beta)-$$
$$-2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)(\sin^4\beta-\sin^2\beta\cos^2\beta+\cos^4\beta)=$$
$$=3\sin^4\beta+3\cos^4\beta-2\sin^4\beta+2\sin^2\beta\cos^2\beta-2\cos^4\beta=$$
$$=\sin^4\beta+2\sin^2\beta\cos^2\beta+\cos^4\beta=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)^2=1.$$

Тождество имеет место при произвольном α.

Учащиеся часто привыкают пользоваться формулами только в таком виде, в каком они даются в учебниках, например, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и т. д.

Между тем во многих случаях полезно использовать другие виды этих формул, например:

$$1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha;\quad\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;\quad\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha;$$
$$\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha\text{ и т. д.}$$

Пример 3. Доказать тождества:

а) $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=|\cos\alpha+\sin\alpha|$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$;

в) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}^6\alpha$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуем левую часть тождества:

$$\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}=$$
$$=\sqrt{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=|\cos\alpha+\sin\alpha|.$$

б) Функция $\operatorname{ctg}\alpha$, входящая в левую часть тождества, теряет смысл при $\alpha=k\pi$, поэтому эти значения аргумента исключаются из множества допустимых значений. Кроме того, левая часть тождества теряет смысл, если $1+\cos\alpha=0$, т. е. $\cos\alpha=-1$, или $\alpha=(2n+1)\pi$. Правая часть

тождества теряет смысл, если $\sin\alpha = 0$, т. е. при $\alpha = k\pi$. Таким образом, множество допустимых значений аргумента дается неравенством: $\alpha \neq k\pi$.

Переходя к доказательству тождества, заметим, что если, кроме тангенса и котангенса, тождество содержит и другие функции, то часто бывает целесообразно выразить все функции преобразуемой части тождества через синусы и косинусы; сделаем это в левой части данного тождества:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

в) Преобразуем левую — более сложную часть тождества. Произведя вычитание дробей, получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}.$$

Решая пример б), мы котангенс выразили через синус и косинус; в данном же примере, чтобы преобразовать полученное выражение к виду правой части тождества, необходимо совершить обратный переход: от синусов и косинусов к котангенсам. Формула $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ показывает, что этот переход можно осуществить путем деления на $\sin^2\alpha$; сделаем это (при допустимых значениях аргумента $\alpha \neq k\pi$):

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Деление на $\sin^2\alpha$ можно заменить вынесением $\sin^2\alpha$ за скобки:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)}{\sin^2\alpha\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Наконец, к тому же результату можно прийти и путем применения формулы: $\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Левая часть тождества теряет смысл, если $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$, или $\cos\alpha - \sin\alpha = 0$, т. е. при $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, или $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4}(4k+1)$; эти две формулы можно объединить в одну: $\alpha = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Не трудно заметить, что при полученных значениях аргумента теряет смысл и правая часть, ибо тогда $\operatorname{ctg}^2\alpha = 1$; кроме того, правая часть тождества теряет смысл также при $\alpha = k\pi$, так как при этих значениях α теряет смысл $\operatorname{ctg}\alpha$. Допустимые значения аргумента:

$$\alpha \neq k\pi;\ \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

г) Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Для преобразования левой части тождества применим формулы: $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$; $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$, получим:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos^2\alpha)} =$$

$$= \operatorname{ctg}^4\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^6\alpha.$$

Чаще всего для преобразования взятой части тождества следует выбирать такие формулы и такие преобразования, которые дают те выражения (функции, аргументы), которые содержатся в другой части тождества.

Пример 4. Доказать тождества:

а) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}$;

б) $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$;

в) $\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1$;

г) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

д) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} + \operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$.

Р е ш е н и я. а) Допустимые значения аргументов:

$$\alpha \neq k\frac{\pi}{2};\ \beta \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Преобразуем левую часть тождества. Так как правая часть содержит функции синус и косинус, то переходим к этим функциям:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Числитель искомого выражения отличается от числителя полученного выражения тем, что содержит только синусы, поэтому выражаем косинусы через синусы:

$$\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Если преобразовывать правую часть тождества, то надо перейти от синусов к тангенсам. Так как $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$ и $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, то целесообразно разделить числитель и знаменатель на $\cos^2\alpha\cos^2\beta$; получим:

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta) - \operatorname{tg}^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Можно числитель правой части данного тождества разделить почленно на знаменатель, что даст возможность сразу перейти к котангенсам, а затем к тангенсам:

$$\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\beta - 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta}.$$

б) Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\alpha \neq (4k+1)\frac{\pi}{4}$.

Выражаем правую часть тождества через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}.$$

Числитель и знаменатель этого выражения еще не имеют требуемого вида; сначала приведем к требуемому виду знаменатель этой дроби. Не трудно видеть, что для этого достаточно умножить на $\sin\alpha+\cos\alpha$ знаменатель дроби. Умножаем числитель и знаменатель дроби на $\sin\alpha+\cos\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}.$$

Как и в примере а), можно преобразовать левую часть тождества; в этом случае целесообразно разделить числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\alpha$, это даст возможность от синусов и косинусов перейти к тангенсам:

$$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2}{(\operatorname{tg}\alpha+1)(\operatorname{tg}\alpha-1)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}.$$

в) Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Преобразуя левую часть равенства к синусам и косинусам (т. е. к функциям, содержащимся в правой части равенства), получаем:

$$\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{4\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$= \frac{\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Числитель дроби в правой части заданного тождества равен 1, поэтому попытаемся получить 1 и в числителе только что полученной дроби; сделать это нетрудно, если принять во внимание, что $1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$. Действительно,

$$\frac{\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha - 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1.$$

Если взять для преобразования правую часть тождества, то достаточно числитель и знаменатель ее дроби разделить на $\cos^4\alpha$ и, тем самым, перейти к тангенсам:

$$\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1 = \frac{\frac{1}{\cos^4\alpha}}{\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}} - 1 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha} - 1 =$$

$$= \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha - 4\operatorname{tg}^2\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

г) Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

На рассматриваемом этапе обучения учителя обычно не разрешают (и мы с этим согласны) преобразовывать одновременно обе части тождества, поэтому подобные примеры у учащихся вызывают затруднения. Этот пример можно решить так: заметив, что числитель правой части содержит $\cos\alpha$, введем $\cos\alpha$ и в числитель левой части тождества $\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(1 - \sin\alpha)\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; так как знаменатель правой части данного тождества $\cos\alpha$ не содержит, то выражаем знаменатель полученной дроби через $\sin\alpha$:

$$\frac{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Можно было, разумеется, числитель и знаменатель левой части тождества умножить на $1+\sin\alpha$ — знаменатель правой части тождества.

д) Допустимые значения аргумента: $\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Многие учащиеся испытывают значительные трудности при решении этого, по существу очень легкого, примера, часто применяют нерациональные преобразования. Между тем правая часть тождества содержит $\sin^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\beta$, поэтому вполне естественно преобразовать левую часть именно этим выражениям:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)+\operatorname{tg}^2\beta(1-\sin^2\alpha)=$$

$$=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\beta-\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta=\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

Можно было не торопиться с преобразованием обоих выражений: $\frac{1}{\cos^2\beta}$ и $\cos^2\alpha$, достаточно преобразовать одно из них, например:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha=$$

$$=\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

Если одну часть тождества не удается преобразовать в другую, то можно преобразовать каждую часть тождества отдельно к одному и тому же выражению.

Пример 5. Доказать тождества:

а) $\left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\frac{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

в) $2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Р е ш е н и я. а) Можно выразить левую и правую части этого тождества через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Но преобразования можно сократить, если вынести за скобку $\operatorname{ctg}\alpha$ в левой части тождества и $\operatorname{ctg}^2\alpha$ в правой части. Преобразуем левую часть тождества:

$$\left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\left[\frac{\operatorname{ctg}\alpha(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+1)}{1+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}\right]^2=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Преобразуем правую часть тождества:

$$\frac{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha(\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+1)}{1+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

б) Допустимые значения аргумента: $\alpha\neq k\frac{\pi}{2}$.

В тождествах, которые подобно данному не содержат других тригонометрических функций, кроме тангенсов и котангенсов, обычно нецелесообразно переходить к синусам и косинусам; для доказательства их достаточно исключить одну из функций (тангенс или котангенс) и выполнить преобразования. Чтобы исключить $\operatorname{ctg}\alpha$ в левой части данного тождества, достаточно перемножить знаменатели:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

В числителе правой части тождества достаточно вынести за скобки $\operatorname{tg}^2\alpha$:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

в) Преобразование каждой части тождества в отдельности оказывается особенно удобным при доказательстве тождеств, левая и правая части которых содержат различные аргументы. Рассматриваемое тождество служит этому иллюстрацией. В данном случае, например, целесообразно обе части тождества преобразовать так, чтобы получить функции аргумента α. Преобразуем левую часть тождества:

$$2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha\right)=2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)=\frac{2(1+\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Преобразуем правую часть тождества:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha}=$$

$$=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Правую часть тождества можно было преобразовать и так:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=2\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тригонометрическое тождество можно доказать и путем приведения его к алгебраическому тождеству.

Этот способ целесообразно применять тогда, когда тождество содержит функции, значения которых взаимообратны при каждом значении аргумента; в этих случаях для сокращения записи удобно ввести вспомогательные обозначения.

Пример 6. Доказать тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=0;$

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta};$

в) $\left(\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\beta}\right)^2=\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\beta-\frac{1}{\cos^2\alpha}}.$

Р е ш е н и я. а) Обозначим: $\operatorname{tg}\alpha=a$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{a}$ и, преобразуя левую часть тождества, получим:

$$\frac{a^2}{1+a^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}}-a^2=\frac{a^2(a^2+1)}{1+a^2}-a^2=a^2-a^2=0.$$

б) Обозначим: $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{a}$ и $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{b}$; имеем:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\beta} = \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = \frac{ab + 1}{b} : \frac{1 + ab}{a} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

в) Полагая $\cos\alpha = a$ и $\operatorname{ctg}\beta = b$, получаем очевидное тождество:

$$\left(\frac{a - b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}.$$

Некоторые из ранее рассмотренных нами тождеств могут быть также доказаны этим способом.

Тождество считается доказанным, если оно получено путем тождественного преобразования какого-либо известного или очевидного тождества.

Пример 7. Доказать тождества: а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

Р е ш е н и я. а) Возведем в третью степень обе части известного тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда получим:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1,$$

откуда $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

б) Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.

Из тождества $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$, которое имеет место при $\alpha \neq k\pi$, получаем тождество $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, которое имеет место при $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Преобразуя последнее тождество, находим:

$\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha$, или $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

В процессе доказательства мы исключили значения аргумента $\alpha = k\pi$, но подстановкой убеждаемся, что при этих значениях α данное тождество имеет место.

Приведенные выше указания мы даем учащимся не сразу, а постепенно (попутно с изучением нового материала), по мере усвоения их и приобретения соответствующих навыков.

Необходимо отметить, что хотя эти указания даются в разделе «Основные тригонометрические тождества», однако они сохраняют свою силу и при доказательстве многих тождеств из других разделов тригонометрии.

Рассмотрим теперь задачи, в которых требуется вычислить числовое значение одного тригонометрического выражения, если известно числовое значение другого тригонометрического выражения (чаще всего содержащего те же тригонометрические функции).

Подобные задачи также следует решать при изучении основных тригонометрических тождеств.

При решении многих таких задач оказывается полезным такое указание: кроме заданного соотношения, следует использовать те из основных тождеств, которые связывают функции, входящие в данное и искомое соотношения.

Пример 8. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$.

Найти: а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha$;
в) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$; г) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

Р е ш е н и е. К данному соотношению присоединяем тождество, связывающее $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, тогда получим систему:

$$\begin{cases}\sin\alpha + \cos\alpha = b \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.\end{cases}$$

Найдя из этой системы $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можно вычислить искомые выражения; чтобы избежать громоздких вычислений, лучше вычислять каждое из искомых выражений целиком.

а) Имеем: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = b^2$, или $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = b^2$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{b^2 - 1}{2}$.

б) Из соотношений

$$2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$$

и

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = b^2$$

вычитанием находим: $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 2 - b^2$, откуда

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2 - b^2 \quad \text{и} \quad \sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2 - b^2}.$$

Если уже найдено выражение $2\sin\alpha\cos\alpha$, то можно поступить и так: $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1 - (b^2 - 1) = 2 - b^2$, откуда

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\sqrt{2 - b^2}.$$

в) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = b\left(1 - \frac{b^2 - 1}{2}\right) = \frac{b}{2}(3 - b^2)$.

г) Из тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ находим:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1,$$

откуда

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{(b^2 - 1)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - b^4 + 2b^2).$$

Пример 9. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$.

Найти: а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;
в) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

Р е ш е н и е. К данному соотношению присоединяем тождество, связывающее $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, получаем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m \\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1. \end{cases}$$

а) Имеем: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = m^2$,

или $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = m^2$,

откуда $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = m^2 - 2$.

б) Вычисляем квадрат искомой величины:

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha =$$
$$= m^2 - 2 - 2 = m^2 - 4,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{m^2-4}.$$

Можно также воспользоваться очевидным тождеством:

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 4\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = m^2 - 4.$$

в) Возведя в куб обе части равенства $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$, находим:

$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = m^3,$$

или $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha + 3m = m^3$, откуда $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = m^3 - 3m$.

Можно было поступить и так:

$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha) = m(m^2 - 2 - 1) = m^3 - 3m.$$

Пример 10. Найти значение выражения $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$ и $90° < \alpha < 180°$.

Р е ш е н и е. *Первый способ**. Из формулы $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$ получаем $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 5$, откуда $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, далее находим $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} =$

$$= \frac{\dfrac{4}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}}{-\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}} = -\frac{3}{7}.$$

Второй способ. Разделив числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$, мы не только упростим выражение, но и выразим его через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{1 - 3\operatorname{tg}\alpha} = \frac{-4+1}{1+6} =$$

$$= -\frac{3}{7}.$$

---

* Первый и второй способы решения задачи см. в книге П. В. Стратилатова «Сборник задач по тригонометрии», № 197 (2).

Деление на $\cos\alpha$ можно заменить вынесением $\cos\alpha$ за скобки:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\operatorname{tg}\alpha+1)}{\cos\alpha(1-3\operatorname{tg}\alpha)}=\frac{-4+1}{1+6}=-\frac{3}{7}.$$

Данную дробь можно также выразить через $\operatorname{tg}\alpha$, если следовать ранее сделанному указанию. Действительно, присоединяя тождество, связывающее $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а именно: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, или $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\operatorname{tg}\alpha+1)}{\cos\alpha(1-3\operatorname{tg}\alpha)}=$$

$$=\frac{-4+1}{1+6}=-\frac{3}{7}.$$

Третий способ. Вместо того чтобы выражать данную дробь через $\operatorname{tg}\alpha$, можно непосредственно использовать известное из условия задачи отношение: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$, откуда $\sin\alpha=-2\cos\alpha$; подставляя значение $\sin\alpha$ в данную дробь, находим:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{-4\cos\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+6\cos\alpha}=\frac{-3\cos\alpha}{7\cos\alpha}=-\frac{3}{7}.$$

Имея отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2}{1}$, можно также положить: $\sin\alpha=-2x$; $\cos\alpha=x$, $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$, тогда получим:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{-4x+x}{x+6x}=\frac{-3x}{7x}=-\frac{3}{7}.$$

Наконец, пропорция $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2}{1}$ позволяет сразу составить производную пропорцию:

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{2(-2)+1}{1-3(-2)},\quad\text{или}\quad\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=-\frac{3}{7}.$$

Мы видим, что, кроме решений, указанных в задачнике П. В. Стратилатова, данная задача допускает еще несколько вполне рациональных решений.

Пример 11. Вычислить $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

Решение. *Первый способ.* Составляем систему:

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5},\end{cases}$$

из которой находим:

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5},\end{cases}$$

или $\begin{cases}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{9}{5}\\ (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{5},\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$

Подставляя эти значения в данную дробь, находим для нее значение: ± 3.

Второй способ. Легко вычислить квадрат данного выражения:

$$\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)^2=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=9,$$

следовательно,

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\pm 3.$$

Пример 12. Вычислить $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=b$.

Решение. Из равенства $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=b^2$ получаем $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=b^2-2$.

Заданное соотношение $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=b$ преобразуем так: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=b$; $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=b$; $\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=b$, откуда

$$\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha=b.$$

Теперь вычисляем искомое выражение:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec\alpha \operatorname{cosec}\alpha = b^2 - 2 + b = b^2 + b - 2.$$

С понятием арифметического корня учащиеся знакомятся в VIII классе, но ясное представление о нем дается им нелегко.

Числовые примеры вида: $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(-5)^2} = -(-5)$ учащиеся еще понимают, но соотношения в общем виде

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

вызывают у них значительные трудности. Между тем решение многих задач по тригонометрии требует четкого понимания этого вопроса. Рассмотрим несколько таких задач, которые решаются обычно при изучении основных тригонометрических тождеств.

Пример 13. Доказать тождество:

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}.$$

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}.$$

Так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $1 + \cos\alpha \geqslant 0$ и $|1 + \cos\alpha| = 1 + \cos\alpha$, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}.$$

Пример 14. Доказать тождество:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha,$$

если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то целесообразно преобразовать подкоренное выражение так, чтобы в зна-

менателе получить $\sin\alpha$. Приняв во внимание, что $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$, будем иметь:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}-$$
$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}.$$

При всех значениях α имеем: $1+\cos\alpha\geqslant 0$; кроме того, при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\alpha>0$, следовательно,

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}-$$
$$-\sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 15. Упростить выражение:
$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$, если $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное выражение:

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}=$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}.$$

В силу условия задачи $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$, поэтому $\sin\alpha+\cos\alpha<0$ и $\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

II. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ.

1. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ.

Применение формул $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ обычно не вызывает трудностей у учащихся; между тем немногие из них ясно понимают, что в этих формулах под α и β можно понимать не только отдельно взятые аргументы, но и некоторые выражения, содержащие аргумен-

ты, что в значительной мере упрощает решение многих задач.

Пример 1. Углы α и β — положительные острые; $\cos\alpha = \frac{1}{7}$; $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{11}{14}$. Определить $\cos\beta$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Во многих школах, с которыми мы имели возможность познакомиться, учащиеся IX класса решали этот пример так:

по формуле $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ имеем:

$$-\frac{11}{14} = \frac{1}{7}\cos\beta - \sqrt{1-\frac{1}{49}}\sin\beta;\quad -\frac{11}{14} = \frac{1}{7}\cos\beta - \frac{4\sqrt{3}}{7}\sin\beta;$$

$$-11 = 2\cos\beta - 8\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2\beta};$$

$$8\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2\beta} = 2\cos\beta + 11;$$

$$192 - 192\cos^2\beta = 4\cos^2\beta + 44\cos\beta + 121;$$

$$196\cos^2\beta + 44\cos\beta - 71 = 0,$$

откуда $\cos\beta = \frac{-22 \pm \sqrt{484+13\,916}}{196} = \frac{-22 \pm \sqrt{14400}}{196} =$

$$= \frac{-22 \pm 120}{196}.$$

Так как по условию угол β — острый угол, то

$$\cos\beta = \frac{-22+120}{196} = \frac{98}{196} = \frac{1}{2}.$$

Второй способ. Но эту задачу и ей подобные можно решать более рациональным способом.

Суть этого способа состоит в том, что формула сложения применяется непосредственно к аргументам, функции которых известны по условию задачи, т. е. в данной задаче к углам α и $\alpha+\beta$ (в приведенном выше решении формула косинуса суммы применяется к одному известному углу α и одному неизвестному углу β).

Применяя этот способ, необходимо прежде всего представить искомый угол как алгебраическую сумму данных углов. В нашем примере данными по условию задачи яв-

ляются углы α и $\alpha+\beta$, искомым является угол β. Искомый угол через заданные выражается так: $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.

По формуле сложения для косинуса находим:

$$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=$$

$$=-\frac{11}{14}\cdot\frac{1}{7}+\sqrt{1-\frac{11^2}{14^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{49}}=-\frac{11}{14}\cdot\frac{1}{7}+$$

$$+\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{49}{14\cdot7}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}2\beta$, если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=5$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=3$.

Решение. Имеем: $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{5+3}{1-5\cdot3}=\frac{8}{-14}=-\frac{4}{7};$$

$$\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{5-3}{1+5\cdot3}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

Пример 3. Найти $\cos(70^\circ+\alpha)$, если $\sin(40^\circ+\alpha)=b$ и $0^\circ<\alpha<45^\circ$.

Решение. Данным является угол $40^\circ+\alpha$, кроме того, известны функции угла 30°; это дает возможность выразить искомый угол $70^\circ+\alpha$ через известные углы:

$$70^\circ+\alpha=(40^\circ+\alpha)+30^\circ.$$

Далее находим:

$$\cos(70^\circ+\alpha)=\cos[(40^\circ+\alpha)+30^\circ]=\cos(40^\circ+\alpha)\cos30^\circ-$$

$$-\sin(40^\circ+\alpha)\sin30^\circ=\sqrt{1-b^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-b\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{3(1-b^2)}-b]$$

(так как $40^\circ<40^\circ+\alpha<85^\circ$, то перед радикалом взят знак $+$).

Пример 4. Найти $\sin\alpha$, если $\sin(45^\circ-\alpha)=-\frac{2}{3}$ и $45^\circ<\alpha<90^\circ$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Функции угла 45° известны, поэтому искомый угол α можно представить как алгебраическую сумму известных углов: $\alpha=45^\circ-(45^\circ-\alpha)$, следовательно,

$$\sin\alpha=\sin[45^\circ-(45^\circ-\alpha)]=\sin 45^\circ\cos(45^\circ-\alpha)-$$

$$-\cos 45^\circ\sin(45^\circ-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{4}{9}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{6}$$

(так как $-45^\circ<45^\circ-\alpha<0$, то $\cos(45^\circ-\alpha)>0$).

Второй способ. Если учащиеся знакомы с формулами дополнительных аргументов, то можно предложить и такой вариант решения задачи:

$$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)=\cos[45^\circ+(45^\circ-\alpha)]=$$

$$=\cos 45^\circ\cos(45^\circ-\alpha)-\sin 45^\circ\cdot\sin(45^\circ-\alpha)=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{6}.$$

Пример 5. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin(30^\circ+\alpha)=b$ и

$$90^\circ<\alpha<180^\circ.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}[(30^\circ+\alpha)-30^\circ]=\frac{\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)\operatorname{tg}30^\circ}.$$

Так как $120^\circ<30^\circ+\alpha<210^\circ$, то $\cos(30^\circ+\alpha)=-\sqrt{1-b^2}$;

$$\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)=\frac{-b}{\sqrt{1-b^2}}\quad\text{и}\quad\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{b}{\sqrt{3}\sqrt{1-b^2}}}=$$

$$=\frac{b\sqrt{3}+\sqrt{1-b^2}}{b-\sqrt{3-3b^2}}.$$

Если пользоваться формулами приведения, то получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}[(30^\circ + \alpha) + 60^\circ] =$$

$$= -\frac{1 - \operatorname{tg}(30^\circ + \alpha)\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) + \operatorname{tg} 60^\circ} = -\frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}\,b}{\sqrt{1 - b^2}}}{-\dfrac{b}{\sqrt{1 - b^2}} + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{3}}{b - \sqrt{3 - 3b^2}}.$$

Пример 6. Упростить выражение: $\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha + \beta)$.

Р е ш е н и е. Чаще всего учащиеся этот пример решают так:

$$\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin^2\beta = \sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha(1 - \cos^2\beta) = \sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha + \sin\alpha\cos^2\beta = \cos\beta(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) = \cos\beta\sin(\beta + \alpha).$$

Однако более рациональным будет такое решение:

$$\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) - \beta] + \sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\alpha + \beta) + \sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)\cos\beta.$$

Пример 7. Дано: $\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{1}{9}$; $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Найти $\cos(\alpha+\beta)$.

Р е ш е н и е. Разность заданных углов

$$\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

есть угол, вдвое меньший искомого. Учитывая это, вычисляем сначала косинус угла $\frac{\alpha+\beta}{2}$:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]=$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right).$$

Из условий $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $0<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$ находим: $\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$. Аналогично, из условий $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ получаем: $-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3};$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Теперь находим: $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-1}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$

и, наконец,

$$\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=2\cdot\frac{49\cdot5}{729}-1=-\frac{239}{729}.$$

Пример 8. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)+$$
$$+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)=1.$$

Р е ш е н и е. Допустимые значения аргумента α определяются неравенствами:

$$\alpha\neq(2k+1)\cdot45^\circ;\quad\alpha\neq(6k-2)\cdot30^\circ;\quad\alpha\neq(6k-1)\,30^\circ.$$

В задачнике К. У. Шахно (Учпедгиз, 1956) дано довольно громоздкое доказательство этого тождества (№ 194), между тем формула $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=(1+\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, непо-

средственно следующая из теоремы сложения для тангенса, значительно облегчает решение этого и подобных * ему примеров. В самом деле, преобразуя левую часть, получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \times$$
$$\times \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = [\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] \operatorname{tg} 2\alpha +$$
$$+ \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = [1 - \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)] \times$$
$$\times \operatorname{tg}(90^\circ - 2\alpha) \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1 -$$
$$- \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) = 1.$$

Рассматриваемое тождество также легко доказать, если заметить, что $2\alpha + (30^\circ - \alpha) + (60^\circ - \alpha) = 90^\circ$, или $2\alpha + (30^\circ - \alpha) = 90^\circ - (60^\circ - \alpha)$ и, следовательно, $\operatorname{tg}[2\alpha + (30^\circ - \alpha)] = \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha)$, или

$$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) +$$
$$+ \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = 1.$$

Пример 9. Если $\sin\alpha = A \sin(\alpha + \beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$. Доказать.

Р е ш е н и е. Допустимые значения для аргументов определяются неравенствами:

$$\alpha + \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}; \quad \cos\beta \neq A.$$

---

* В книге «Задания для учащихся заочной средней школы», IX класс (Учпедгиз, 1958, стр. 74) приводятся такие преобразования при решении примера № 188 (3) из задачника Стратилатова:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} - 1\right) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \frac{1 - 1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \times$$
$$\times \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Если же применить формулу $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) \operatorname{tg}(x - y)$ к первым двум членам, то получим: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = [1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\alpha] \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta = [1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}\alpha - 1] \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \times \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. Применением указанных формул столь же просто доказываются и тождества: № 188 (1), 188 (4), 188 (5), 245 (15), 301 (8), 343 (5, 6, 11, 12) и др. из задачника Стратилатова.

Искомое соотношение содержит только аргументы $\alpha+\beta$ и β, поэтому в данном соотношении заменяем аргумент α разностью $(\alpha+\beta)-\beta$, тогда получим: $\sin[(\alpha+\beta)-\beta] = A\sin(\alpha+\beta)$, или $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta = A\sin(\alpha+\beta)$.

Деление на $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$ дает $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta = A\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

2. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО, ТРОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА.

В своей практической работе мы пришли к выводу, что традиционный вид этих формул себя не оправдывает, так как учащиеся усваивают их формально. Действительно, формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ учащиеся как будто «хорошо понимают», но уже простое требование: развернуть по этой формуле $\sin\alpha$ или $\sin(\alpha+\beta)$ вызывает у средних и слабых учащихся затруднения, и обычные преобразования $\sin\alpha = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}$ кажутся им искусственными и непонятными. Кроме того, по аналогии с формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ учащиеся выдумывают целый ряд неверных формул, вида:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha;\quad \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha.$$

Попутно заметим, что формула $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ трудно поддается и словесной формулировке. В учебнике С. И. Новоселова дается такая формулировка: «Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента». Но эта формулировка очень мало помогает учащимся понять смысл формулы, ибо не указывает ясно, как именно получаются углы в правой части, а под словами «данного аргумента» можно понимать и двойной аргумент. Мы уже не говорим о том, что при пользовании этой формулой необходимо разъяснить учащимся, что никаких специальных «двойных» углов нет, что любой угол можно рассматривать, как двойной и т. д.

На протяжении нескольких лет мы поступаем так: берем соотношение

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

и полагаем в нем $\beta=\alpha$.

Мы получаем формулу:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

которую называем формулой синуса двойного аргумента и формулируем так: синус произвольного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса половины этого аргумента.

В этом виде формула свободна от всех тех недостатков, о которых говорилось выше. Применение этой формулы не вызывает никаких трудностей. Сразу же после вывода ее мы предлагаем учащимся по этой формуле развернуть (устно), например, такие выражения:

$$\sin 120^\circ;\ \sin 20^\circ;\ \sin 10^\circ;\ \sin 5^\circ;\ \sin 2\alpha;$$

$$\sin 3\alpha;\ \sin\frac{\alpha}{2};\ \sin\frac{\alpha}{4};\ \sin(30^\circ+\alpha);\ \sin(\alpha-\beta).$$

Решая последние два примера, учащиеся наглядно видят, что можно применять разные формулы для преобразования того же самого тригонометрического выражения. Чтобы оттенить эту очень важную при решении задач мысль, мы предлагаем учащимся такое упражнение: развернуть $\sin 5\alpha$ по формулам:

а) двойных углов $\left(\sin 5\alpha=2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\right)$;

б) синуса суммы углов (например, $\sin 5\alpha=\sin(4\alpha+\alpha)=\sin 4\alpha\cos\alpha+\cos 4\alpha\sin\alpha$;

в) синуса разности углов (например, $\sin 5\alpha=\sin(8\alpha-3\alpha)=\sin 8\alpha\cos 3\alpha-\cos 8\alpha\sin 3\alpha$).

Аналогично записываются формулы двойного аргумента и для остальных тригонометрических функций:

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

После того как учащиеся научились свободно пользоваться формулой $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, мы даем эту формулу в таком виде: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, откуда $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

Аналогично: $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$;

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha; \quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

В таком виде формулами удобно пользоваться для «свертывания» выражений. Упражнениям на свертывание выражений при помощи этих формул мы всегда отводим некоторое время, располагая упражнения в порядке возрастания трудностей.

В задачнике П. В. Стратилатова имеется много таких упражнений (№ 218—220); большинство из них мы решаем с учащимися устно.

Сказанное нами относительно вывода формул двойного аргумента относится и к формулам тройного и половинного аргумента.

Таким образом, формулы тригонометрии мы *первоначально* выводим для произвольного аргумента α и только после усвоения их учащимися переходим к традиционному виду формул.

Полезно познакомить учащихся еще с двумя формулами для косинуса двойного угла: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, которыми часто приходится пользоваться при решении задач.

Приведем пример.

«Дано: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2{,}2$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$*».

---

* А. И. Худобин, Н. И. Худобин, Сборник задач по тригонометрии, № 693, Учпедгиз, 1955.

Задачу можно решить так:

$$\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = 2{,}2,$$

откуда $3 - 4\sin^2\alpha = 2{,}2$, или $\sin^2\alpha = 0{,}2$, но $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, следовательно, $\cos 2\alpha = 0{,}6$, а $\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm 0{,}8$.

Перейдем к рассмотрению некоторых задач на применение формул этого раздела.

Есть группа задач, которые вызывают особый интерес у учащихся. Их удивляет кажущаяся искусственность решения, его неожиданность; учащимся кажется, что очень трудно додуматься до такого решения. Подобные задачи нередко даются на конкурсных экзаменах. Около 10 таких задач имеется и в задачнике П. В. Стратилатова.

Речь идет о задачах, для решения которых используется формула: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ (такое преобразование мы будем называть «свертыванием» по формуле синуса двойного угла).

Если сравнить аргументы, входящие в левую и правую части этого равенства, то заметим, что их можно рассматривать как два члена геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 2; именно это обстоятельство часто подсказывает возможность применить формулу синуса удвоенного аргумента:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Хорошими подготовительными упражнениями к таким задачам могут служить примеры № 221 (4—6) из задачника П. В. Стратилатова:

1) $\cos 10^\circ \cos 80^\circ = \cos 10^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}\sin 20^\circ$;

2) $\sin 40^\circ \sin 50^\circ = \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{2}\sin 80^\circ = \frac{1}{2}\cos 10^\circ$;

3) $2\sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha) = 2\sin(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ + 2\alpha) = \cos 2\alpha$.

Затем рассматриваются более сложные примеры (в классе и на кружке).

Пример 1. Решить уравнение: $8 \sin x \cos 2x \cos x = \sqrt{3}$.

Решение. Свертывая левую часть уравнения, находим:

$$4 \cdot 2 \sin x \cos x \cos 2x = \sqrt{3}; \quad 2 \cdot 2 \sin 2x \cos 2x = \sqrt{3};$$

$$2 \sin 4x = \sqrt{3}; \quad \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } 4x = \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3}.$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

Пример 2. Найти значение выражения:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \quad \text{при} \quad \alpha = 5°37'30''.$$

Решение. Так как в заданном выражении аргументы образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2, то попытаемся свернуть это выражение. Предварительно умножим и разделим данное выражение на $2 \sin \alpha$, получим:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{2 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Продолжая свертывать, находим:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha = \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{4 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha \cos 8\alpha}{8 \sin \alpha} = \frac{\sin 16\alpha}{16 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin(16 \cdot 5°37'30'')}{16 \cdot \sin 5°37'30''} = \frac{\sin 90°}{16 \cdot 0{,}098} = \frac{1}{1{,}568} = 0{,}638.$$

Пример 3. Доказать тождество:

$$8 \cos 10° \cos 20° \cos 40° = \operatorname{ctg} 10°.$$

Решение. Углы в левой части тождества составляют геометрическую прогрессию. Свертывая левую часть, находим:

$$8 \cos 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{4 \cdot 2 \sin 10° \cos 10° \cos 20° \cos 40°}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{4 \cdot \sin 20° \cos 20° \cos 40°}{\sin 10°} = \frac{2 \sin 40° \cos 40°}{\sin 10°} = \frac{\sin 80°}{\sin 10°} = \frac{\cos 10°}{\sin 10°} =$$

$$= \operatorname{ctg} 10°.$$

Пример 4. Доказать справедливость равенства:

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е. Умножив и разделив левую часть равенства на $4\cos 18^\circ$, получим:

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Пример 5. Вычислить без таблиц: $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Р е ш е н и е. Заменим синусы на косинусы дополнительных углов, тогда получим:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ =$$

$$= \frac{\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ \cdot 2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\cos 80^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ \cdot 2}{2\sin 20^\circ \cdot 2} =$$

$$= \frac{\cos 80^\circ \sin 80^\circ \cdot 2}{4\sin 20^\circ \cdot 2} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Можно сохранить первый синус, тогда получим:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Этот пример можно решить без свертывания, если воспользоваться зависимостью между данными углами и углом 60°, а именно: $50^\circ = 60^\circ - 10^\circ$; $70^\circ = 60^\circ + 10^\circ$, тогда получим:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \sin (60^\circ - 10^\circ) \sin (60^\circ + 10^\circ) =$$

$$= \sin 10^\circ (\sin^2 60^\circ \cos^2 10^\circ - \cos^2 60^\circ \sin^2 10^\circ) = \sin 10^\circ \left(\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin^2 10^\circ\right) = \frac{1}{4}\sin 10^\circ (3 - 3\sin^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ) =$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ) = \frac{1}{4}\sin (3 \cdot 10^\circ) = \frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8}.$$

Заметим, что доказанное равенство есть частный случай (при $\alpha = 10^\circ$) более общего соотношения:

$\sin\alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$; при $\alpha = 20^\circ$ получаем также известное соотношение: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Пример 6. Доказать тождество:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=0{,}125.$$

Р е ш е н и е. Аргументы $\frac{\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$ и $\frac{5\pi}{7}$ не образуют геометрической прогрессии.

Но нетрудно преобразовать функцию $\cos\frac{5\pi}{7}$ так, чтобы получить нужные углы, действительно, $\cos\frac{5\pi}{7}=$ $=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-\cos\frac{2\pi}{7}$.

Теперь можно применить свертывание:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=0{,}125.$$

Пример 7. Показать, что

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

Р е ш е н и е. В левой части равенства можно выделить два произведения, которые легко вычисляются свертыванием:

$$1)\ \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{15}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\left(\pi-\frac{8}{15}\pi\right)=$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{15}} \cdot \sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} = -\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}} =$$

$$= -\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)}{16\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{\sin\frac{\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{1}{16};$$

$$2)\ \cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15} = \frac{2\sin\frac{3\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}}{2\sin\frac{3\pi}{15}} = \frac{\sin\frac{12\pi}{15}}{4\sin\frac{3\pi}{15}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{15}\right)}{4\sin\frac{3\pi}{15}} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, левая часть данного равенства равна: $\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{15} = \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, что и требовалось доказать.

Этот пример помещен в книге А. К. Давыдова «Сборник задач по алгебре и элементарным функциям», № 916, Учпедгиз, 1959, но в условии его добавлено: «... если

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};\ \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}\ ».$$

Из приведенного выше решения видно, что данное тождество можно доказать, не пользуясь значениями $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}$, эти данные лишние.

Пример 8. Доказать тождество: $4\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10} = -1$.

Р е ш е н и е. Заменим синусы косинусами:

$$4\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10} = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{15\pi}{10}-\frac{2\pi}{10}\right) =$$

$$= -4\cos\frac{4\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10} = -4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = -1.$$

Аналогично для доказательства тождества: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ можно сперва преобразовать левую часть к виду: $-4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} - 1$, а затем первое слагаемое свернуть по формуле.

Свертывание по формулам синуса и косинуса тройного аргумента $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha$; $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$ можно также с большой пользой применить к решению различных задач. Так, например, часто встречающиеся выражения $3 - 4\sin^2\alpha$ и $1 - 4\sin^2\alpha$ преобразуются так:

$$3 - 4\sin^2\alpha = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1 - 4\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = \frac{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}.$$

Пример 9*. Доказать тождество: $1 + 2\cos 7x = \frac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}$.

Р е ш е н и е. Развертывая $\cos 7x$ по формуле двойного аргумента, получаем функцию одного из углов правой части тождества:

$$1 + 2\cos 7x = 1 + 2(1 - 2\sin^2 3{,}5x) = 3 - 4\sin^2 3{,}5x,$$

теперь применяем указанное преобразование:

$$3 - 4\sin^2 3{,}5x = \frac{3\sin 3{,}5x - 4\sin^3 3{,}5x}{\sin 3{,}5x} = \frac{\sin(3\cdot 3{,}5x)}{\sin 3{,}5x} =$$

$$= \frac{\sin 10{,}5x}{\sin 3{,}5x}.$$

* Тождества в примерах 9 и 10 взяты из книги К. У. Шахно, Сборник задач по математике, № 190 и 191, Учпедгиз, 1956. Доказательства там приведены интересные, но довольно искусственные.

Пример 10. Доказать тождество:

$$4\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Р е ш е н и е. Применяя формулы сложения к левой части тождества, получаем функции аргумента $\frac{\alpha}{2}$, после чего применяем то же преобразование:

$$4\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=3\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-$$

$$-\sin^2\frac{\alpha}{2}=3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример 11. Вычислить $\sin 18°$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Формулы кратных аргументов дают возможность вычислить функции угла $18°$. В самом деле, замечая, что $5\cdot 18°=90°$, т. е. $2\cdot 18°+3\cdot 18°=90°$, получаем: $\sin(2\cdot 18°)=\cos(3\cdot 18°)$, или $2\sin 18°\times\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°$.

Разделив обе части равенства на $\cos 18°\neq 0$, получаем

$$2\sin 18°=4\cos^2 18°-3,\quad 2\sin 18°=4(1-\sin^2 18°)-3,$$

$$4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0,\quad \text{откуда}\quad \sin 18°=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Но $\sin 18°>0$, поэтому $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Второй способ.* Этот способ основан на использовании некоторых соотношений между тригонометрическими функциями углов, кратных $18°$.

Имеем:

$$\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}.$$

* Этот способ приводится в книге В. А. Кречмара «Задачник по алгебре», Физматгиз, 1959, стр. 157.

Но $2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$; $2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$.

Перемножая эти два равенства почленно, найдем:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

С другой стороны,

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Итак, если положить: $\sin\frac{\pi}{10}=\cos\frac{2\pi}{5}=x$; $\cos\frac{\pi}{5}=y$,

то имеем: $y-x=\frac{1}{2}$; $xy=\frac{1}{4}$.

Но $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$.

Следовательно, $x+y=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Пользуясь этим соотношением и соотношением $y-x=\frac{1}{2}$, получим:

$$x=\sin\frac{\pi}{10}=\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Имея значение sin 18°, находим значения остальных функций:

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Значение tg18° можно использовать для доказательства следующего тождества.

Пример 12. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=5$.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что $\operatorname{tg}36^\circ\cdot\operatorname{tg}72^\circ=\sqrt{5}$. Действительно, $\operatorname{tg}36^\circ\cdot\operatorname{tg}72^\circ=\operatorname{tg}(2\cdot 18^\circ)\operatorname{ctg}18^\circ=$

$$=\frac{2\operatorname{tg}18^\circ\operatorname{ctg}18^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 18^\circ}=\frac{2}{1-\frac{5-2\sqrt{5}+1}{10+2\sqrt{5}}}=\frac{2(10+2\sqrt{5})}{4+4\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{4(1+\sqrt{5})}=$$

$$=\sqrt{5}.$$

Второй способ. Можно доказать данное тождество, не пользуясь значением тригонометрических функций угла 18°. Углы в левой части тождества указывают на возможность свертывания по формуле синуса двойного аргумента, поэтому переходим к синусам и косинусам:

$$\operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ = \frac{\sin^2 36^\circ \cdot \sin^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ}.$$

Далее находим:

$$\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \cdot 2 \sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 144^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Чтобы преобразовать числитель, понизим прежде всего степень синуса и косинуса*, тогда получим:

$$\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ = \frac{(1 - \cos 72^\circ)(1 - \cos 144^\circ)}{4} = \frac{1}{4} (1 - \cos 72^\circ -$$

$$- \cos 144^\circ + \cos 72^\circ \cos 144^\circ) = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 108^\circ \cos 36^\circ -$$

$$- \cos 72^\circ \cos 36^\circ) = \frac{1}{4} (1 + \cos 72^\circ \cos 36^\circ) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ = \frac{5}{16} : \frac{1}{16} = 5.$$

Третий способ. Обозначим: $\operatorname{tg} 36^\circ \operatorname{tg} 72^\circ = x$ и составим уравнение относительно x.

С одной стороны, $x = \operatorname{tg} 36^\circ \operatorname{tg}(2 \cdot 36^\circ)$, т. е. $x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 36^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 36^\circ}$, откуда $\operatorname{tg}^2 36^\circ = \frac{x}{x+2}$. С другой стороны, $x = -\operatorname{tg} 144^\circ \operatorname{tg} 72^\circ$, или $x = \frac{-2 \operatorname{tg}^2 72^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 72^\circ}$, откуда $\operatorname{tg}^2 72^\circ = \frac{x}{x-2}$. Подставляя полученные значения для $\operatorname{tg}^2 36^\circ$ и $\operatorname{tg}^2 72^\circ$ в равенство:

---

* О понижении степени синуса и косинуса см. стр. 46.

$\operatorname{tg}^2 36° \operatorname{tg}^2 72° = x^2$, получаем уравнение: $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x}{x-2} = x^2$, или $x^2-4=1$ $(x \neq 0)$, откуда $x^2=5$.

Необходимо обратить внимание учащихся на рациональное решение задач, в которых используют формулы сложения и формулы кратных углов.

Пример 13. Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$. Найти $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)$.

Р е ш е н и е. Учащиеся часто усложняют решение задачи выводом формулы:

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \beta}{1 - \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

между тем лучше вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$,

а затем и $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{16}} = 1 : \frac{13}{16} = \frac{16}{13}$.

Преимущество второго пути еще ярче выступает в следующем примере.

Пример 14. Если α, β и γ—острые углы и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \beta = 2$; $\operatorname{tg} \gamma = \frac{13}{9}$, то $2\alpha - \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Доказать.

Р е ш е н и е. Так как $\operatorname{tg}[2\alpha - (\beta - \gamma)] = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}(\beta-\gamma)}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(\beta-\gamma)}$,

то вычисляем $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}(\beta - \gamma) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = \frac{2-\frac{13}{9}}{1+2\cdot\frac{13}{9}} = \frac{5}{9} : \frac{35}{9} = \frac{1}{7}.$$

Далее находим:

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta+\gamma) = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}} = 1.$$

Складывая неравенства:

$$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\beta < -\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2},$$

получаем: $-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \beta + \gamma < \frac{3\pi}{4}$, и поэтому $2\alpha - \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

3. ПОНИЖЕНИЕ СТЕПЕНИ СИНУСА И КОСИНУСА.

Известные формулы половинных углов:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}},$$

или

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

дают возможность понизить степень синуса и косинуса и этим значительно облегчают преобразование многих выражений. Мы считаем существенным недочетом многих учебников и задачников именно то, что в них не обращено внимание на это обстоятельство. Приведем несколько примеров.

1. В курсе тригонометрии П. Я. Кожеурова* (§ 42) преобразование выражений вида $f^2 - \varphi^2$ (f и φ — синусы

---

* П. Я. Кожеуров, Курс тригонометрии для техникумов, Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

или косинусы некоторых аргументов) рекомендуется выполнять разложением этих выражений на множители. Приведение к логарифмическому виду выражения $\sin^2\alpha - \cos^2\beta$ этим способом дает такие преобразования:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = (\sin\alpha+\cos\beta)(\sin\alpha-\cos\beta) = \left[\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]\left[\sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right] = 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta\right) =$$

$$= \sin\left[-\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta)\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\times$$

$$\times\cos(\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Если же воспользоваться формулами понижения степени, то будем иметь:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\beta}{2} = -\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} =$$

$$= -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

В § 65 той же книги содержатся такие преобразования:

а) $1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right] = 4\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\right.$

$$\left.-\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 4\left(\sin 30^\circ+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin 30^\circ-\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\cdot 2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)2\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(15^\circ-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{4}\right) = 4\cdot 2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot 2\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\times$$

$$\times\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = 4\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

б) $3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right] = 4\left(\sin^2 60^\circ - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= 4\left(\sin 60^\circ + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin 60^\circ - \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\cdot 2\sin\frac{60^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{60^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2}\cdot 2\cos\frac{60^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{60^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= 4\cdot 2\sin\frac{60^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{60^\circ + \frac{\alpha}{2}}{2}\cdot 2\sin\frac{60^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{60^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2} =$$

$$= 4\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Между тем, применяя формулы понижения степени, получим:

а) $1 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2(1 - \cos\alpha) = 2\cos\alpha - 1 = 2(\cos\alpha -$

$$- \cos 60^\circ) = 4\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

б) $3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 3 - 2(1 - \cos\alpha) = 1 + 2\cos\alpha = 2(\cos 60^\circ +$

$$+ \cos\alpha) = 4\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)^*.$$

2. В книге «Сборник задач по элементарной математике» Н. П. Антонова и других** авторы во многих случаях пользуются формулами понижения степени синусов и косинусов, но задачу № 806 (стр. 485): «Упростить выражение $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$», авторы решают так:

---

* Другой способ преобразования этих выражений дан на стр. 41.

** Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин, Сборник задач по элементарной математике, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1960.

«Преобразуем сначала выражение $-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Применив формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$, получим:

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -[\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma].$$

К каждому из слагаемых применим то же преобразование. Получим:

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Но по условию $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Тогда будем иметь:

$$\cos(\alpha-\beta-\gamma) = \cos(\beta+\gamma-\alpha) = \cos(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha) = \cos(\pi-2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Выполнив аналогичные преобразования, найдем, что

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+1).$$

Теперь применим формулу $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ и две аналогичные формулы для $\cos 2\beta$ и $\cos 2\gamma$. Тогда данное выражение преобразуется к виду:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\frac{1}{2}(4-2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta-2\sin^2\gamma),$$

а это выражение равно 2».

Если же применить формулы понижения степени функций, то получим:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2\gamma+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\times$$

$$\times\cos(\alpha+\beta) = 1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma+\cos^2\gamma+$$

$$+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2.$$

3. В книге «Задачник по алгебре» В. А. Кречмара* в преобразованиях тригонометрических выражений часто применяется выделение полного квадрата. Это преобразование заслуживает внимания, но оно не всегда рациональ-

* В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, Физматгиз, 1959.

но. Рассмотрим, например, решение задачи № 58 (§ 4), приведенное в этом сборнике.

Решить уравнение:

$$\cos^2\alpha + \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) = 1 + 2\cos\alpha\cos(\alpha + x).$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos(\alpha + x) = 1 - \cos^2 x.$$

Отсюда $[\cos\alpha - \cos(\alpha + x)]^2 - \sin^2 x = 0,$

т. е.

$$[\cos\alpha - \cos(\alpha+x) - \sin x]\,[\cos\alpha - \cos(\alpha + x) + \sin x] = 0;$$

$$(\cos\alpha - \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x - \sin x)(\cos\alpha - \cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x + \sin x) = 0;$$

$$[\cos\alpha(1 - \cos x) + \sin x(\sin\alpha - 1)]\,[\cos\alpha(1 - \cos x) + \sin x(\sin\alpha + 1)] = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то предыдущее равенство приводит к уравнению $\cos^2\alpha\,(1 - \cos x)^2 = 0$, или $\cos x = 1$. Оба уравнения: $\sin x = 0$ и $\cos x = 1$ удовлетворяются значениями $x = 2k\pi$.

Если же $\sin x \neq 0$, то полученное ранее уравнение преобразуем так:

$$\sin x\left(\cos\alpha\frac{1-\cos x}{\sin x} + \sin\alpha - 1\right)\cdot\sin x\left(\cos\alpha\frac{1-\cos x}{\sin x} + \sin\alpha + 1\right) = 0;$$

$$\left[\left(\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha\right) - 1\right]\left[\left(\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha\right) + 1\right] = 0;$$

$$\left(\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \sin\alpha\right)^2 - 1 = 0;$$

$$\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\cos\alpha\sin\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \sin^2\alpha - 1 = 0;$$

$$\cos^2\alpha\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 1\right) + 2\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0;$$

откуда $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е. $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,\alpha$, или $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + k\pi = -\alpha + \dfrac{2k+1}{2}\pi.$

Если же для решения данного уравнения применить формулы понижения степени к первым двум слагаемым, то получим:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos^2(\alpha+x)=1+2\cos\alpha\cos(\alpha+x),$$

или

$$\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\cos^2(\alpha+x)=2\cos\alpha\cos(\alpha+x),$$

и мы приходим к двум уравнениям:

1) $\cos(\alpha+x)=0$, откуда $\alpha+x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, или

$$x=-\alpha+\frac{2k+1}{2}\pi;$$

2) $\cos(\alpha-x)+\cos(\alpha+x)=2\cos\alpha$, или
$2\cos\alpha\cos x=2\cos\alpha$, откуда $\cos x=1$ и $x=2k\pi$.

4. В § 2 главы IV сборника задач по тригонометрии Р. И. Позойского имеются специальные упражнения (№ 248—260) на применение рассматриваемых формул, однако эти упражнения однообразны. Кроме того, много упражнений, которые следует решать понижением степени, помещены в разделах, предшествующих этим формулам, и, следовательно, учащиеся должны их решать нерациональными способами (например, упражнения № 46—50, 164, § I, гл. IV; № 238а, § 2, гл. IV).

5. В задачнике А. И. и Н. И. Худобиных упражнений на понижение степени синуса и косинуса совсем нет, поэтому выполнение преобразований во многих случаях будет несомненно источником перегрузки учащихся. Приводим пример доказательства тождества из этого задачника (№ 633) без применения формул понижения степени синуса и косинуса.

Доказать тождество:

$$\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=0{,}5.$$

Р е ш е н и е.

$\sin^2(\alpha-30^\circ)+\sin^2(\alpha+30^\circ)-\sin^2\alpha=(\sin\alpha\cos 30^\circ-\cos\alpha\sin 30^\circ)^2+(\sin\alpha\cos 30^\circ+\cos\alpha\sin 30^\circ)^2-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cos^2 30^\circ-2\sin\alpha\cos 30^\circ\cos\alpha\sin 30^\circ+\cos^2\alpha\times\times\sin^2 30^\circ+\sin^2\alpha\cos^2 30^\circ+2\sin\alpha\cos 30^\circ\cos\alpha\sin 30^\circ++\cos^2\alpha\sin^2 30^\circ-\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\cos^2 30^\circ+2\cos^2\alpha\times$

$$\times \sin^2 30° - \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{3}{4} + 2\cos^2\alpha \cdot \frac{1}{4} - \sin^2\alpha = \frac{3}{2}\sin^2\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0{,}5.$$

Между тем, применяя формулы понижения степени, получим:

$$\sin^2(\alpha - 30°) + \sin^2(\alpha + 30°) - \sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha - 60°) + 1 - \cos(2\alpha + 60°)}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1 - 2\cos 2\alpha \cos 60° + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha}{2} = 0{,}5.$$

Но применить здесь формулы понижения степени учащиеся не могут, так как этот пример должен быть решен до того, как учащиеся познакомятся с соответствующими формулами.

Сказанное относится и к задачам № 178 (7, 8), 221 (13) из задачника Стратилатова.

Понижению степени синуса и косинуса в задачнике Стратилатова специально посвящен пример № 240, но в действительности этот прием надо применять и при решении других задач из этого сборника. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Доказать справедливость равенства:

$$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1.$$

Решение. Понижая степень косинусов, получаем:

$$\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta =$$

$$= \frac{1+\cos(2\alpha+2\beta)+1+\cos(2\alpha-2\beta)}{2} - \cos 2\alpha \cos 2\beta =$$

$$= 1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1.$$

Пример 2. Доказать тождество:

$$\cos^2\beta + \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta).$$

Решение. В книге «Задания для учащихся заочной средней школы», IX класс (Учпедгиз, Москва, 1958, стр. 84), рекомендуется левую часть этого тождества преобразовать так:

$$\cos^2\beta + \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha + \beta) = \cos^2\beta + \cos^2\alpha -$$

$$-(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = \cos^2\beta + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta -$$

$$-2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\beta(1 - \sin^2\alpha) +$$

$$+\cos^2\alpha\,(1-\sin^2\beta)-2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta=2\cos^2\beta\cos^2\alpha-$$
$$-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=2\cos\beta\cos\alpha(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha)=$$
$$=2\cos\beta\cos\alpha\cos(\alpha+\beta).$$

Теперь применим формулы понижения степени. Незачем понижать степень всех трех квадратов сразу, так как понижение степени двух из них даст возможность сложить получающиеся косинусы. Остается выяснить, какие из двух квадратов целесообразнее всего понизить. Так как при вычитании уничтожается 1, то следует понизить третий квадрат и один из первых двух, тогда получаем:

$$\cos^2\beta+\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\beta+$$
$$+\frac{1+\cos 2\alpha-1+\cos(2\alpha+2\beta)}{2}=\cos^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos\beta=$$
$$=\cos\beta\,[\cos\beta+\cos(2\alpha+\beta)]=2\cos\beta\cos\alpha\cos(\alpha+\beta).$$

Пример 3. Решить уравнение: $\sin^4 x+\cos^2 2x=2$.

Р е ш е н и е. Понижение степени и синуса и косинуса в данном уравнении нецелесообразно. Действительно, понизив только $\sin^2 x$, мы получим функцию $\cos 2x$, входящую во второе слагаемое левой части данного уравнения, и тем самым получим уравнение с одной функцией одного и того же аргумента. Между тем, понизив одновременно и степень $\cos^2 2x$, мы получим еще функцию $\cos 4x$ и, следовательно, уравнение с функциями различных аргументов. Поэтому данное уравнение целесообразно решать так:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\cos^2 2x=2;$$
$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+4\cos^2 2x=8;$$
$$5\cos^2 2x-2\cos 2x-7=0;$$

откуда $\cos 2x=\frac{1\pm 6}{5}$; 1) $\cos 2x=-1$, $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos 2x=\frac{7}{5}$, решений нет.

Пример 4. Доказать тождество:

$$2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-1=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

Р е ш е н и е. Понижение степени функций в левой части тождества является вполне естественным, так как сразу получим функции, содержащиеся в правой части тождества:

$$2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 1 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 2\beta) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)(1-\cos 2\beta) - 1 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+$$

$$+\cos 2\alpha\cos 2\beta + 1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta) -$$

$$-1 = \cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

Пример 5. Решить уравнение:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Р е ш е н и е. Понижая степень синусов, находим:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2};$$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$; $2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0$; $\cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0$, откуда

$$1)\ \cos 4x = 0,\ 4x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8};$$

$$2)\ 2\cos 2x + 1 = 0,\ \cos 2x = -\frac{1}{2},\ 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Пример 6. Решить уравнение: $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Р е ш е н и е. Представив уравнение в виде: $(\sin^2 x)^2 + \left[\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}$ и понизив степень синусов, постепенно находим:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4};$$

$$(1-\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 = 1;$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1;$$

$$1 - \cos 2x + \sin 2x = 0;\quad 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0;$$

$$\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0;$$

$$1)\ \sin x = 0,\quad x = k\pi;$$

$$2)\ \sin x + \cos x = 0,\ x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Пример 7. Решить уравнение: $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{9}{8}$.

Р е ш е н и е. Можно и здесь понизить степень всех синусов, но можно также воспользоваться тем, что $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; это равенство дает возможность выделить в левой части данного уравнения выражение $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$, тогда получим:

$$\sin^4 x + \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]^2 -$$

$$- 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{9}{8};$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]^2 = \frac{9}{8};$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 4 - 2\cos^2 2x = \frac{9}{2};$$

$$\cos^2 2x + 2\cos 2x - \frac{1}{2} = 0,\ \text{откуда:}$$

$$1)\ \cos 2x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2},\ \text{решений нет;}$$

$$2)\ \cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2},\ x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$$

Пример 8. Решить уравнение:

$$16\sin^6 x + 6\cos 2x - 3\cos 4x = 4{,}75.$$

Р е ш е н и е. Понижая степень синуса и развертывая $\cos 4x$ по формуле удвоенного аргумента, мы получаем алгебраическое уравнение относительно $\cos 2x$:

$$16\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+6\cos 2x-3(2\cos^2 2x-1)=4{,}75;$$

$$2-6\cos 2x+6\cos^2 2x-2\cos^3 2x+6\cos 2x-$$
$$-6\cos^2 2x+3=4{,}75;$$
$$-2\cos^3 2x=-0{,}25;$$
$$\cos 2x=0{,}5;$$
$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3};$$
$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}.$$

Пример 9. Решить уравнение: $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{61}{256}$.

Р е ш е н и е. Понижаем степень синуса и косинуса:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{61}{256}.$$

После возвышения в степень, приведения подобных членов и умножения на 16 получим:

$$1+10\cos^2 2x+5\cos^4 2x=\frac{61}{16};$$
$$\cos^4 2x+2\cos^2 2x-\frac{9}{16}=0.$$

Отбрасывая отрицательный корень, находим

$$\cos^2 2x=\frac{1}{4},\text{ или }\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4},\text{ откуда }\cos 4x=-\frac{1}{2},$$
$$4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}.$$

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ.

Необходимость знания формул преобразования произведений тригонометрических функций в суммы сейчас уже не является вопросом дискуссии.

Применение этих формул дает возможность выразить степени и произведения степеней синуса и косинуса суммой первых степеней этих функций; формулы понижения степени синуса и косинуса являются частными случаями этих формул.

Преобразования произведений в суммы часто применяются в тригонометрических преобразованиях и дают значительные упрощения; во многих случаях эти преобразования являются наиболее естественными.

Пример 1. Доказать тождество: $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1.$

Решение. $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} =$

$$= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 1 + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение:

$$\sin\alpha \sin 7\alpha - \sin 3\alpha \sin 5\alpha.$$

Решение. Может показаться, что рассматриваемые формулы не находят себе применение в преобразованиях к виду, удобному для логарифмирования, так как увеличивают число слагаемых, но оказывается это не всегда так. Действительно,

$$\sin\alpha \sin 7\alpha - \sin 3\alpha \sin 5\alpha = \frac{\cos 6\alpha - \cos 8\alpha}{2} - \frac{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha}{2} = \frac{2\sin 4\alpha \sin(-2\alpha)}{2} = -\sin 2\alpha \sin 4\alpha.$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\sin(x+1)\cos(2x+2) = \sin(3x+3)\cos(4x+4).$$

Решение. $\sin(-x-1) + \sin(3x+3) -$

$$-\sin(-x-1) - \sin(7x+7) = 0;$$

$$\sin(7x+7) - \sin(3x+3) = 0;\ 2\sin(2x+2)\cos(5x+5) = 0;$$

откуда: 1) $\sin(2x+2) = 0,\ 2x+2 = k\pi,\ x = \frac{k\pi}{2} - 1;$

2) $\cos(5x+5) = 0,\ 5x+5 = k\pi + \frac{\pi}{2},$

$$x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{10} - 1.$$

Пример 4. Упростить выражение:

$$\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Р е ш е н и е. Эта задача помещена в сборнике задач по тригонометрии Р. И. Позойского (гл. IV, § 1, № 40). В этом параграфе рассматриваются задачи, решаемые применением теорем сложения; на странице 30 мы дали два решения этой задачи с помощью формул сложения. Однако применение формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (им посвящен § 2, гл. IV этого задачника) дает наиболее короткое решение задачи:

$$\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \frac{\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+2\beta)+\sin\alpha}{2} = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

Пример 5. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha.$$

Р е ш е н и е. Это тождество широко распространено в литературе и поэтому способы его решения мы рассмотрим более подробно (в задачнике П. В. Стратилатова оно помещено под № 245 (15). Допустимые значения аргумента: $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}$; $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Левую часть тождества учащиеся чаще всего преобразуют так:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)-\operatorname{tg}3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 3\alpha\,(\cos 3\alpha - \cos\alpha\cos 2\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha}.$$

Остается доказать, что

$$\cos 3\alpha - \cos\alpha\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

Совершенно естественно преобразовать произведение косинусов в сумму:

$$\cos 3\alpha - \cos\alpha\cos 2\alpha = \cos 3\alpha - \frac{\cos 3\alpha+\cos\alpha}{2} = \frac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{2} =$$

$$= -\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

Тот же результат можно получить и так:

$$\cos 3\alpha - \cos\alpha\cos 2\alpha = \cos(\alpha+2\alpha) - \cos\alpha\cos 2\alpha =$$

$$= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha - \cos\alpha\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha\sin\alpha,$$

но учащимся нелегко догадаться заменить $\cos 3\alpha$ на $\cos(2\alpha+\alpha)$.

Ясно, что слагаемые левой части данного тождества можно было группировать и иначе, например так: $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}3\alpha) + \operatorname{tg}2\alpha$, или так: $\operatorname{tg}\alpha + (\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha)$.

Раньше мы указывали, что если тождество содержит только функции тангенс, то не следует (как правило) переходить к синусам и косинусам; это положение сохраняет свою силу и в данном случае, ибо данное тождество можно доказать и так:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha} = -\frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha}(-1 + \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha + 1) =$$

$$= -\operatorname{tg}3\alpha \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha.$$

Этот способ доказательства также допускает вариации, например:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha - \alpha) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \frac{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}3\alpha \operatorname{tg}\alpha},$$

или $\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha - 2\alpha)$ и т. д.

Еще лучше воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

тогда получим:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha)\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}3\alpha =$$

$$= (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha - 1)\operatorname{tg}3\alpha = -\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha;$$

или формулой $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = (1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$; тогда

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}\alpha + (1 + \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha) =$$

$$= (1 - 1 - \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha)\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha.$$

Если воспользоваться формулами для тангенсов двойного и тройного углов, то можно тоже доказать данное тождество, не переходя к синусам и косинусам; при этом не следует приводить к одному знаменателю сразу все выражение; преобразования значительно сократятся, если это сделать постепенно:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = (3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha) \times$$

$$\times \frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=-\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

Особый интерес представляет доказательство тождеств путем преобразования какого-либо очевидного тождества.

В данном случае можно исходить из очевидного соотношения между углами, входящими в данное тождество: $\alpha+2\alpha=3\alpha$ (или $3\alpha-\alpha=2\alpha$, или $3\alpha-2\alpha=\alpha$). Последовательно находим: $\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$, тогда $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=$ $=\operatorname{tg}3\alpha$, или $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$, что и требовалось доказать.

Заметим, что тождество $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=$ $=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha$ есть частный случай более общего тождества: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, которое можно доказать также всеми указанными способами.

Пример 6. Вычислить без таблиц: $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

Р е ш е н и е. Это выражение нами было вычислено ранее (см. стр. 38), однако целесообразнее этот пример решить при помощи рассматриваемых формул:

$$\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{\cos 40^\circ-\cos 60^\circ}{2}\sin 70^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ\sin 70^\circ-\frac{1}{2}\sin 70^\circ\right).$$

Совершенно нецелесообразно, как это иногда делают, записать последнее выражение в виде $\cos 40^\circ\sin 70^\circ-\cos 60^\circ\times$ $\times\sin 70^\circ$ и преобразовать $\cos 60^\circ\sin 70^\circ$ в сумму, так как это противоречит самой цели вычисления данного выражения. Преобразуя $\cos 40^\circ\sin 70^\circ$ в сумму, окончательно находим:

$$\frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ\sin 70^\circ-\frac{1}{2}\sin 70^\circ\right)=\frac{1}{4}(\sin 30^\circ+\sin 110^\circ-$$

$$-\sin 70^\circ)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\sin 70^\circ-\sin 70^\circ\right)=\frac{1}{8}.$$

Пример 7. Доказать тождество:

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha.$$

Решение. Естественно преобразовать произведения синусов в суммы. Целесообразнее вначале преобразовать произведение последних двух синусов, так как в этом случае получатся более простые углы:

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = 2\sin\alpha(\cos 2\alpha - \cos 120^\circ) = \\ = 2\sin\alpha\cos 2\alpha - 2\sin\alpha\cos 120^\circ.$$

Чтобы получить правую часть тождества, необходимо упростить полученное выражение, причем совершенно нецелесообразно, как это часто делают учащиеся, преобразовывать в сумму $2\sin\alpha\cos 120^\circ$ (вместо того, чтобы заменить $\cos 120^\circ$ на $-\frac{1}{2}$); преобразуя первое слагаемое, получим:

$$2\sin\alpha\cos 2\alpha - 2\sin\alpha\cos 120^\circ = \\ = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha.$$

Пример 8. Показать, что величина выражения $\cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ не зависит от величины угла β.

Решение. Если выражение содержит квадраты функций и их произведения, то можно сперва преобразовать только произведения функций в суммы, так как это может привести к уничтожению одного или нескольких квадратов функций; последнее обстоятельство показывает, что в данном примере следует преобразовать $2\cos\alpha\cos\beta$, или $2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$ (но не $2\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$):

$$\cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\beta + \\ + \cos^2(\alpha+\beta) - [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\beta + \\ + \cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \sin^2\alpha.$$

Можно, однако, сперва только понизить степени функций, так как это даст возможность преобразовать их:

$$\cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \\ = \frac{1+\cos 2\beta+1+\cos(2\alpha+2\beta)}{2} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 1 + \\ + \cos(2\beta+\alpha)\cos\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = 1+\cos\alpha\cos(\alpha+ \\ + 2\beta) - \cos\alpha[\cos(\alpha+2\beta) + \cos\alpha] = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Можно, наконец, выполнять и оба преобразования одновременно, но в этом случае для получения более рационального решения следует преобразовать функции одних и тех же углов (в нашем примере это углы β и $\alpha+\beta$):

$$\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}[1+$$

$$+\cos 2\beta+1+\cos(2\alpha+2\beta)]-\cos\alpha[\cos(2\beta+\alpha)+\cos\alpha]=1+$$
$$+\cos\alpha\cos(2\beta+\alpha)-\cos\alpha\cos(2\beta+\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

Изложенным приемом легко решаются задачи № 300 (8; 17) и др. из задачника П. В. Стратилатова.

Пример 9. Решить неравенство:

$$\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8},\quad \text{если}\quad 0<x<\frac{\pi}{4}.$$

Р е ш е н и е. Соображения, высказанные при решении предыдущего примера, полностью применимы и для преобразования левой части данного неравенства. Выполним, например, только преобразование произведений в суммы:

$$\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\cos^2 x\cos x\cos 3x-$$

$$-\sin^2 x\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}\cos^2 x(\cos 4x+\cos 2x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 x(\cos 2x-\cos 4x)=\frac{1}{2}\cos 4x\ (\cos^2 x+\sin^2 x)+$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}\cos 4x+$$

$$+\frac{1}{4}(1+\cos 4x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 4x.$$

Подставляя полученное выражение в данное неравенство, находим:

$$\frac{1+3\cos 4x}{4}>\frac{5}{8};\ 3\cos 4x>\frac{3}{2};\ \cos 4x>\frac{1}{2},$$

или $\cos 4x>\cos\frac{\pi}{3}$. Так как по условию задачи $0<4x<\pi$ и на интервале $(0;\ \pi)$ косинус монотонно убывает, то

$$0<4x<\frac{\pi}{3},\ \text{или}\ 0<x<\frac{\pi}{12}.$$

Пример 10. Доказать тождество:

$$4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)=3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Р е ш е н и е. Понижая степень и преобразовывая произведение в сумму (после разложения суммы кубов на множители), получим:

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 4(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ)(\cos^2 20^\circ - \cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 4 \cdot 2\cos 10^\circ \cos 30^\circ \left(\frac{1+\cos 40^\circ}{2} - \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} + \frac{1+\cos 80^\circ}{2}\right) = 2\sqrt{3}\cos 10^\circ (2 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ - \frac{1}{2} - \cos 20^\circ) = 2\sqrt{3}\cos 10^\circ \left(\frac{3}{2} + 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ\right) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Пример 11. Преобразовать в произведение:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2.$$

Р е ш е н и е. Преобразование произведения функций в сумму ничего не дает, вследствие наличия угла γ, не связанного с углами α и β. Если же понизить степень каких-либо двух из первых трех слагаемых, то мы сможем их преобразовать: $\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{2 - 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2} = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. Теперь, естественно, надо получить тригонометрические функции углов $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$, что достигается преобразованием произведения $2\cos\alpha\cos\beta$ в сумму. Таким образом получим:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2 = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin^2\gamma + [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma - 2 = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin^2\gamma - 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \cos^2\gamma + \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma] + \cos\gamma[-\cos\gamma + \cos(\alpha-\beta)] = [\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma][\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)] = 4\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

Пример 12. Преобразовать в произведение:

$$\cos a + \cos b + \cos c - 1 - 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

Р е ш е н и е. Этот пример решен в книге В. А. Кречмара «Задачник по алгебре», Физматгиз, 1959, стр. 132, № 41 (1); решение приведено довольно громоздкое, так как автор не воспользовался формулами преобразования произведения в сумму. Приводим это решение.

Имеем:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) = 2 \left(\cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} \right);$$

$$\cos c - 1 = -2 \sin^2 \frac{c}{2}.$$

Поэтому левая часть примет вид:

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - 2 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} - 2 \sin^2 \frac{c}{2} -$$

$$- 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = 2 \left[\cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \left(\sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} \right) \right] = 2 \left[\cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} - \right.$$

$$\left. - \left(\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[\left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{c}{2} \right] \cdot \left[\left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) - \sin \frac{c}{2} \right] =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{c}{2} \right) \left(\cos \frac{a+b}{2} - \sin \frac{c}{2} \right) = 2 \left[\cos \frac{a-b}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2} \right) \right] \left[\cos \frac{a+b}{2} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2} \right) \right] =$$

$$= -8 \sin \frac{\pi + b + c - a}{4} \sin \frac{\pi + a + c - b}{4} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi + a + b - c}{4} \sin \frac{a + b + c - \pi}{4}.$$

Между тем после преобразования $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ вполне естественно преобразовать $2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}$ в сумму, так как в результате этого получим те же функции тех же аргументов, которые мы только что получили, что в свою очередь даст возможность группировать слагаемые.

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - 2\sin^2\frac{c}{2} - 2\sin\frac{c}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2} -$$

$$- 2\sin^2\frac{c}{2} = 2\cos\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{c}{2}\right) + 2\sin\frac{c}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} -\right.$$

$$\left. - \sin\frac{c}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{c}{2}\right)\left(\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{c}{2}\right) =$$

$$= -8\sin\frac{\pi+b+c-a}{4}\sin\frac{\pi+a+c-b}{4}\sin\frac{\pi+a+b-c}{4}\times$$

$$\times\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}.$$

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВВЕДЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УГЛА.

В учебной и методической литературе при классификации задач, решаемых введением вспомогательных углов, исходят из основных видов алгебраических сумм и устанавливают, при помощи каких тригонометрических функций их можно преобразовать. Такая классификация, по нашему мнению, для средней школы неудачна, ибо она абстрактна и не всегда целесообразна.

Так, выражение $a + b$ обычно преобразовывается так:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1 + \operatorname{tg}\gamma) = a(\operatorname{tg}45° + \operatorname{tg}\gamma) =$$

$$= \frac{a\sin(45° + \gamma)}{\cos 45°\cos\gamma},$$

но, применив это преобразование к выражению $\sin\alpha\cos\beta+2$, получаем:

$$\sin\alpha\cos\beta+2=2\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2}+1\right)=2(\operatorname{tg}\gamma+1)=2(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}45°)=$$

$$=\frac{2\sin(45°+\gamma)}{\cos 45°\cos\gamma},$$

$$\text{где } \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta;$$

между тем ясно, что данное выражение целесообразнее преобразовать так:

$$\sin\alpha\cos\beta+2=2\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2}+1\right)=2(\cos\gamma+1)=4\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{где } \cos\gamma=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta.$$

К тому же указанная система изложения в школьной практике приводит к тому, что один и тот же вопрос рассматривается дважды: сперва рассматриваются преобразования некоторых сумм при помощи углов 30°, 45°, 60° и т. д., а затем аналогичные преобразования при помощи других углов. При нашей системе изложения этот искусственный разрыв устраняется и тем самым экономится учебное время.

В основу классификации задач мы положили не те выражения, которые надо преобразовать, а те функции, при помощи которых эти преобразования выполняются.

Изучаемый материал мы распределяем на четыре темы.

Замена произвольного выражения тангенсом (или котангенсом) вспомогательного угла.

Пример 1. Преобразовать в произведение: $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$.

Р е ш е н и е. $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}60°+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(60°+\alpha)}{\cos 60°\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\sin(60°+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение: $4+3\operatorname{tg}\alpha$.

Р е ш е н и е. $4+3\operatorname{tg}\alpha = 3\left(\frac{4}{3}+\operatorname{tg}\alpha\right) = 3(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha) =$

$$= \frac{3\sin(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha\cos\gamma}, \text{ где } \operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{3}.$$

Если выбрать угол γ острым и найти его значение с точностью до 1′, то получим: $4+3\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sin(53\,8'+\alpha)}{\cos\alpha\cos 53^\circ 8'}$.

Пример 3. Преобразовать в произведение: $1-\sqrt{5}\operatorname{ctg}\alpha$.

Р е ш е н и е. $1-\sqrt{5}\operatorname{ctg}\alpha = 1-\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\gamma =$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\gamma)}{\cos\gamma}, \quad \text{где } \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{5}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример 4. Решить уравнение: $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$.

Р е ш е н и е. $\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = 1$; $\sin x + \operatorname{tg}30^\circ\cos x = 1$;

$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cos x = 1$; $\sin x\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos x = \cos 30^\circ$*;

$$\sin(x+30^\circ) = \sin 60^\circ;\ x+30^\circ = 180^\circ n + (-1)^n 60^\circ;$$
$$x = 180^\circ n + (-1)^n 60^\circ - 30^\circ.$$

Пример 5. Преобразовать в произведение: $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}}$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma}{1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\gamma}{1+\frac{1}{\cos\gamma}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin\gamma}{\cos\gamma+1} = \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$ и $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$; если же выбрать $\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}$,

---

* К этому же уравнению можно прийти и делением обеих частей данного уравнения на $2\sqrt{3}$.

то $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma} = -\frac{1}{\cos\gamma}$, и данное выражение равно

$$-\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Замена положительного выражения квадратом тангенса (или котангенса) вспомогательного угла.

Пример 6. Преобразовать в произведение: $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

Р е ш е н и е. Допустимые значения аргумента:

$$\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Данное выражение легко преобразуется, если 3 заменить через $\operatorname{tg}^2 60°$.

$$3 - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{tg}^2\alpha = (\operatorname{tg}60° + \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}\alpha) =$$

$$= \frac{4\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Пример 7. Преобразовать в произведение: $\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Замена $\sqrt{2}$ на тангенс вспомогательного угла приводит к довольно сложному выражению, поэтому лучше данное выражение преобразовать так:

$$\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(1+\operatorname{tg}^2\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2\gamma}, \text{ где}$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Если принять $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}}$, то угол γ можно взять на любом из интервалов, задающихся формулой $k\pi < \gamma < k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$); если же принять $\operatorname{tg}\gamma = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}}$,

то угол γ можно выбрать на любом из интервалов, задающихся формулой

$$k\pi + \frac{\pi}{2} < \gamma < k\pi + \pi.$$

Так как данное выражение преобразовано тождественно, то значение его не зависит от интервала, в котором угол γ выбран. Это замечание относится и к другим примерам, рассматриваемым в этом разделе.

Пример 8. Преобразовать в произведение: $\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$.

Решение. $\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\gamma} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}} =$

$$= \frac{1}{|\cos\gamma|}, \text{ где } \operatorname{tg}^2\gamma = 3\sin^2\alpha.$$

Мы видим, что рассматриваемая замена оказывается весьма полезной, когда требуется упростить квадратный корень из суммы положительных величин.

Пример 9. Преобразовать в произведение: $\sqrt{4 + \operatorname{tg}^3 20°}$.

Решение. $\sqrt{4 + \operatorname{tg}^3 20°} = \sqrt{4\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^3 20°}{4}\right)} =$

$$= 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\gamma} = \frac{2}{\cos\gamma},$$

если принять $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^3 20°}$ и $2k\pi < \gamma < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Пример 10. Преобразовать в произведение:

$$\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Решение. Предполагая $b \neq 0$ и $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, можно данное выражение преобразовать так:

$$\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = \sqrt{b^2\cos^2\alpha\left(1 + \frac{a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha}\right)} =$$

$$= \sqrt{b^2\cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\gamma)} = \left|\frac{b\cos\alpha}{\cos\gamma}\right|, \text{ где } \operatorname{tg}\gamma = \pm\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha.$$

Эта задача помещена в сборнике задач по тригонометрии Худобиных (Учпедгиз, 1955, № 884) и к ней дан такой ответ: $b\cos\alpha\sec\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$. Эта же задача имеется

и в сборнике задач А. К. Довыдова (№ 1330) и к ней дан такой ответ: $a\sin\alpha\sec\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha$. Даже если авторы полагают (в условии задачи этого нет), что на параметры и аргумент налагаются такие ограничения, что $|b\cos\alpha|=b\cos\alpha$ (например, $a>0$; $b>0$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$), то ответ должен быть такой: $\frac{b\cos\alpha}{|\cos\varphi|}$.

Действительно, даже в этом случае равенство $\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha>0$ позволяет угол φ выбрать не только на интервале $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, но, например, и на интервале $\pi<\varphi<\frac{3\pi}{2}$, и тогда $\cos\varphi<0$.

Пример 11. Преобразовать в произведение: $a\pm b$, если $\frac{b}{a}>0$.

Р е ш е н и е. Положительное выражение $\frac{b}{a}$ можно принять за $\operatorname{tg}^2\gamma$ и тогда получим выражение, более простое, чем при замене $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\gamma$:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+\operatorname{tg}^2\gamma)=\frac{a}{\cos^2\gamma};$$

$$a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right)=a(1-\operatorname{tg}^2\gamma)=\frac{a(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)}{\cos^2\gamma}=\frac{a\cos 2\gamma}{\cos^2\gamma},$$

где $\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{b}{a}$.

Замена выражений, не превышающих единицы (по абсолютной величине) **синусом** (или косинусом) **вспомогательного угла.**

Такая замена дает часто более простой результат, чем замена тангенсом.

Пример 12. Преобразовать в произведение: $\sqrt{2}+2\cos\alpha$.

Р е ш е н и е. $\sqrt{2}+2\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\right)=$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 13. Преобразовать в произведение: $5\sin\alpha - 2$.

Решение. $5\sin\alpha - 2 = 5\left(\sin\alpha - \frac{2}{5}\right) = 5(\sin\alpha - \sin\gamma) = 10\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, где $\sin\gamma = \frac{2}{5}$.

Пример 14. Преобразовать в произведение: $2\sin\alpha - 5$.

Так как $\left|\frac{2\sin\alpha}{5}\right| < 1$, то заданное выражение преобразуем так:

$$2\sin\alpha - 5 = 5\left(\frac{2\sin\alpha}{5} - 1\right) = 5(\cos\gamma - 1) = -10\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

где $\cos\gamma = \frac{2}{5}\sin\alpha$.

Пример 15. Преобразовать в произведение: $2 + \cos 2\alpha$.

Решение. $2 + \cos 2\alpha = 2\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) = 2(1 + \cos\gamma) = 4\cos^2\frac{\gamma}{2}$, где $\cos\gamma = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$.

Пример 16. Преобразовать в произведение:

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha.$$

Решение. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos 60°) = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right)$.

Пример 17. Преобразовать в произведение: $4\cos^2\alpha - 1$.

Решение. $4\cos^2\alpha - 1 = 2(1 + \cos 2\alpha) - 1 = 1 + 2\cos 2\alpha = 2(\cos 60° + \cos 2\alpha) = 4\cos(30° + \alpha)\cos(30° - \alpha)$.

Пример 18. Преобразовать в произведение:

$$a\sin x + b\cos x.$$

Решение. Попытаемся найти такое M, чтобы в выражении $Ma\sin x + Mb\cos x$ можно было принять $Ma = \cos\gamma$ и $Mb = \sin\gamma$.

Из равенства $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ находим $M^2a^2 + M^2b^2 = 1$; $M^2 = \frac{1}{a^2+b^2}$.

Таким образом, полагая $M = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и выбирая угол γ в соответствии со знаками чисел a и b, получаем:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\gamma\sin x + \sin\gamma\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\gamma),$$

где $\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{или } \sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Пример 19. Решить уравнение: $4\sin x + 3\cos x = 5$.

Р е ш е н и е. Делим обе части уравнения на $M = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, получим:

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1.$$

Полагая $\frac{4}{5} = \sin\gamma$, где $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, получаем $\frac{3}{5} = \cos\gamma$ и тогда данное уравнение преобразуется так:

$\sin\gamma\sin x + \cos\gamma\cos x = 1$; $\cos(x-\gamma) = 1$, откуда $x - \gamma = 2k\pi$ и $x = 2k\pi + \gamma$.

Пример 20. Решить уравнение: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

Р е ш е н и е. Здесь $M = \sqrt{1+3} = 2$ и мы получаем:

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2};$$

$$\cos 60^\circ\cos x + \sin 60^\circ\sin x = \frac{1}{2};$$

$$\cos(x - 60^\circ) = \frac{1}{2};$$

$$x - 60^\circ = 360^\circ k \pm 60^\circ;$$

1) $x = 360^\circ k$; 2) $x = 360^\circ k + 120^\circ$.

Пример 21. Преобразовать в произведение: $a + b$, если $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+\cos\gamma)=2a\cos^2\frac{\gamma}{2},\ \text{где}\ \cos\gamma=\frac{b}{a}.$$

Можно положить $\cos\gamma=-\frac{b}{a}$, тогда получим:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1-\cos\gamma)=2a\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Замена положительных выражений (не превышающих по абсолютной величине единицы) **квадратом синуса** (или косинуса) **вспомогательного угла.**

Пример 22. Преобразовать в произведение: $0,25-\sin^2\alpha$.

Р е ш е н и е. $0,25-\sin^2\alpha=\sin^2 30^\circ-\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 60^\circ}{2}-$

$$-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{-\cos 60^\circ+\cos 2\alpha}{2}=\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha).$$

Пример 23. Преобразовать в произведение: $3-25\sin^2\alpha$.

Р е ш е н и е. $3-25\sin^2\alpha=25\left(\frac{3}{25}-\sin^2\alpha\right)=25(\sin^2\gamma-$

$$-\sin^2\alpha)=\frac{25}{2}(1-\cos 2\gamma-1+\cos 2\alpha)=25\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha),$$

$$\text{где}\ \sin\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Рассматриваемая замена часто применяется тогда, когда надо упростить квадратный корень из разности положительных величин.

Пример 24. Преобразовать в произведение: $\sqrt{4-\sin^2\alpha}$.

Р е ш е н и е. $\sqrt{4-\sin^2\alpha}=\sqrt{4\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)}=$

$$=2\sqrt{1-\sin^2\gamma}=2|\cos\gamma|,\ \text{где}\ \sin\gamma=\pm\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Пример 25. Преобразовать в произведение: $\sqrt{3-2\cos^2\alpha}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение. $\sqrt{3-2\cos^2\alpha} = \sqrt{3\left(1-\frac{2}{3}\cos^2\alpha\right)} =$

$= \sqrt{3(1-\cos^2\gamma)} = \sqrt{3\sin^2\gamma} = \sqrt{3}\sin\gamma,$

если принять $\cos\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha$ и $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\gamma<2k\pi+\pi.$

Пример 26. Преобразовать в произведение:

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\alpha}}{1-\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\alpha}},$$

если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Решение. $\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\alpha}}{1-\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}{1-\sqrt{1-\sin^2\gamma}} =$

$= \frac{\cos\gamma}{1-\cos\gamma} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$

если принять $\sin\gamma = \sin\beta\cos\alpha$ и $2k\pi<\gamma<\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

Пример 27. Преобразовать в произведение:

$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, если $a>0$; $b>0$; $0<\alpha<\pi$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение так:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = (a+b)^2-2ab-2ab\cos\alpha =$$
$$= (a+b)^2-2ab\ (1+\cos\alpha) = (a+b)^2-4ab\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= (a+b)^2\left[1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right].$$

Из алгебры известно, что при $a>0$ и $b>0$ всегда $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$, откуда $2\sqrt{ab}<a+b$, или $4ab<(a+b)^2$, откуда $\frac{4ab}{(a+b)^2}<1$, и поэтому $\left|\frac{4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(a+b)^2}\right|<1$; следовательно, можно положить: $\frac{4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(a+b)^2} = \cos^2\gamma$ и тогда получим:

$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} = \sqrt{(a+b)^2(1-\cos^2\gamma)} = (a+b)\sin\gamma$,

где $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $2k\pi < \gamma < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Пример 28. Преобразовать в произведение: $a - b$, если $0 < \frac{b}{a} < 1$.

Р е ш е н и е. Имеем: $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right) = a(1 - \cos^2\gamma) =$

$= a\sin^2\gamma$, где $\cos^2\gamma = \frac{a}{b}$.

Заметим, что к задачам № 872, 873, 874 из задачника А. И. и Н. И. Худобиных и к задачам № 246 (1, 2); 247 (1, 2) главы IV из задачника Р. И. Позойского даны неточные ответы. В этих примерах, содержащих арифметические корни, авторами не учтены границы для вспомогательных углов и различные возможные значения параметров. Так, к задаче № 247 (в) из задачника Р. И. Позойского: «Введением вспомогательного угла привести к виду, удобному для логарифмирования: $a - \sqrt{a^2 - b^2}$», дается такой ответ: $2a\sin^2\frac{\beta}{2}$, где $\sin\beta = \frac{b}{a}$, в котором, очевидно, не учитываются ни допустимые возможные значения параметров, ни возможные границы для выбора вспомогательного угла. Действительно, преобразовав данное выражение:

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = a - \sqrt{a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = a - \sqrt{a^2(1 - \sin^2\beta)} =$$

$= a - \sqrt{a^2\cos^2\beta} = a - |a\cos\beta|$, где $\sin^2\beta = \frac{b^2}{a^2}$, мы видим, что при $a\cos\beta > 0$ заданное выражение равно $a - a\cos\beta =$ $= 2a\sin^2\frac{\beta}{2}$, а при $a\cos\beta < 0$ оно равно $a + a\cos\beta =$ $= a(1 + \cos\beta) = 2a\cos^2\frac{\beta}{2}$.

Мы рассмотрели различные виды преобразований тригонометрических выражений введением вспомогательного угла, с которыми приходится встречаться в средней школе. Необходимо заметить, что такие преобразования не всегда

являются необходимыми и рациональными. Так, например, выражение $2 + \sin\alpha$ значительно проще вычислить при помощи таблицы натуральных значений тригонометрических функций и применение рассмотренных выше преобразований для вычисления этого выражения является совершенно нецелесообразным.

III. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Задачи на установление области определения функций мы уже решали попутно с решением различных задач предыдущих разделов, особенно в тех случаях, когда область определения функции не совпадала с множеством всех действительных чисел.

Мы подчеркиваем учащимся, что допустимыми являются такие действительные значения аргументов, при которых функция принимает определенные действительные значения.

Совокупность всех допустимых значений аргументов называется областью определения функции.

Прежде всего мы напоминаем учащимся области определения хорошо известных им функций.

а) Функция x^n определена при всех действительных значениях x.

б) Функция $\frac{a}{x}$ имеет смысл при всех действительных значениях x, кроме x, равного нулю. Следовательно, областью определения функции будет множество всех действительных чисел, не равных нулю; это есть совокупность двух интервалов $(-\infty\ ;\ 0)$ и $(0;\ \infty)$.

в) Область определения функции $\sqrt{x}$ есть множество всех неотрицательных чисел, $x \geqslant 0$.

г) Областью определения показательной функции a^x является множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty;\ \infty)$.

д) Областью определения логарифмической функции $\log_a x$ является множество всех положительных чисел, т. е. интервал $(0,\ \infty)$.

е) Областью определения функций $\sin x$ и $\cos x$ есть множество всех действительных чисел.

ж) Областью определения функции $\operatorname{tg} x$ является множество всех действительных чисел, не равных $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

з) Областью определения функции $\operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел, не равных $k\pi$.

и) Областью определения функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ является множество действительных чисел, по абсолютной величине не превосходящих единицы, т. е. $|x| \leqslant 1$, или сегмент $[-1; 1]$.

к) Областью определения функций $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,ctg} x$ является множество всех действительных чисел.

Затем мы переходим к установлению областей определения более сложных функций.

Пример 1. Найти области определения следующих функций:

$$\text{а) } y = \cos\frac{5}{x-3}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos x}.$$

Р е ш е н и я. а) Так как функция $y = \cos t$ определена при всех действительных значениях t, то y может терять смысл только одновременно с $t = \frac{5}{x-3}$. Последнее имеет место тогда, когда знаменатель дроби обращается в нуль, т. е. при $x - 3 = 0$, или $x = 3$. Областью определения является множество всех действительных чисел, не равных 3.

б) Функция $t = \sin^2 x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $y = \frac{1}{t}$ теряет смысл при $t = 0$. Следовательно, данная функция теряет смысл при $\sin^2 x = 0$, т. е. при $\sin x = 0$, откуда $x = k\pi$, где k — произвольное целое число. Область определения состоит из всех действительных чисел, не равных $k\pi$.

в) Сумма $\sqrt{\cos x} + \sqrt{-\cos x}$ имеет смысл, если оба слагаемых имеют смысл. Последнее имеет место при неотрицательных подкоренных выражениях; таким образом, одновременно должны выполняться соотношения $\begin{cases} \cos x \geqslant 0; \\ -\cos x \geqslant 0; \end{cases}$

или $\begin{cases}\cos x \geqslant 0;\\ \cos x \leqslant 0,\end{cases}$ что может иметь место только при $\cos x = 0$, откуда $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, область определения данной функции состоит из бесконечного множества изолированных точек, абсцисса которых $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Найти области определения функций:

а) $y = \lg \sin x$ б) $y = \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$.

Решения. а) Функция $y = \lg z$ имеет смысл при $z > 0$, поэтому должно быть: $\sin x > 0$, откуда $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$. Областью определения функции является бесконечное множество интервалов: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$.

б) Действительные значения y получаются только при неотрицательном подкоренном выражении, следовательно, должно быть: $\lg \cos 2\pi x > 0$.

Это соотношение может выполняться только при $\cos 2\pi x \geqslant 1$; но $|\cos 2\pi x| \leqslant 1$, поэтому должно иметь место равенство: $\cos 2\pi x = 1$, откуда $2\pi x = 2\pi k$ и $x = k$, где k — произвольное целое число.

Областью определения данной функции является множество всех целых чисел.

Пример 3. Найти области определения функций:
а) $y = \arccos \frac{5}{x}$; б) $y = \arcsin \frac{3}{3 - \sin x}$.

Решения. а) Исключаем значение $x = 0$. Так как значения косинуса не могут превышать 1, то допустимыми являются такие значения аргумента, при которых $\left|\frac{5}{x}\right| \leqslant 1$, т. е. $\frac{5}{|x|} \leqslant 1$, откуда $|x| \geqslant 5$, так как $|x| > 0$.

Если $x > 0$, то $|x| = x$ и тогда $x \geqslant 5$; если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и тогда $-x \geqslant 5$, откуда $x \leqslant -5$.

б) Допустимыми будут такие значения аргумента, при которых $\left|\frac{3}{3 - \sin x}\right| \leqslant 1$, т. е. $\frac{3}{|3 - \sin x|} \leqslant 1$. Но при всех действительных значениях x имеем $2 \leqslant 3 - \sin x \leqslant 4$, поэтому $3 - \sin x > 0$ и $|3 - \sin x| = 3 - \sin x$. Теперь имеем:

$\frac{3}{3-\sin x} \leqslant 1$, откуда $3 \leqslant 3-\sin x$, или $\sin x \leqslant 0$ и $2k\pi+\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi+2\pi$.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\lg(2-x)+\sin\sqrt{5-x}=2.$$

Решение. Функция $y=\lg(2-x)$ определена только при $x<2$, а функция $y=\sin\sqrt{x-5}$ при $x\geqslant 5$. Так как система $\begin{cases} x<2 \\ x\geqslant 5 \end{cases}$ несовместна, то заданное уравнение решений не имеет.

Кроме сравнения областей определения функций, при решении задач применяется также сравнение множеств их значений, как это видно из следующих примеров.

Пример 5. Доказать, что уравнение

$6\cos^2 5x-5\cos x+5{,}1=0$ решений не имеет.

Решение. Перепишем данное уравнение так: $6\cos^2 5x+5{,}1=5\cos x$. Множество значений функций $y=6\cos^2 5x+5{,}1$ определяется неравенствами: $5{,}1\leqslant y\leqslant 11{,}1$, а функции $z=5\cos x$ — неравенствами: $-5\leqslant z\leqslant 5$.

Таким образом, левая и правая части уравнения не могут иметь одинаковых значений и, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Пример 6. Решить уравнение: $\sin 7x-\sin x=2$.

Решение. Перепишем данное уравнение так:

$$\sin 7x=2+\sin x.$$

Множеством значений для функции $y=\sin 7x$ является сегмент $-1\leqslant y\leqslant 1$, а для функции $z=2+\sin x$ сегмент $1\leqslant z\leqslant 3$. Таким образом, данное уравнение $y=z$ может иметь решения только при $y=z=1$, т. е. $\sin 7x=2+\sin x=1$. Из уравнения $2+\sin x=1$ получаем $\sin x=-1$ и $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$. Проверим, удовлетворяют ли полученные для x значения уравнению $\sin 7x=1$.

Имеем: $\sin 7x=\sin 7\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(14k\pi-\frac{7\pi}{2}\right)=$

$$=\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{7\pi}{2}+4\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Данное уравнение имеет такие решения: $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Решить уравнение: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5$.

Решение. Переписав уравнение в виде:

$$4 \sin^2 3x \sin^2 x = \sin 3x + 5,$$

замечаем, что множеством значений функции $y = 4 \sin^2 3x \sin^2 x$ является сегмент $[0; 4]$, а множеством значений функции $z = \sin 3x + 5$ сегмент $[4; 6]$; таким образом, данное уравнение может иметь решение только при $y = z = 4$. Равенство $4 \sin^2 3x \sin^2 x = 4$, или $\sin^2 3x \sin^2 x = 1$ возможно только при $\sin^2 3x = \sin^2 x = 1$, откуда $\sin x = \pm 1$. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, тогда $\sin 3x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 6k\pi\right) = -1$, а $\sin 3x + 5 = 4$ и данное уравнение удовлетворяется.

Если же $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, тогда

$$\sin 3x = \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + 6k\pi\right) = 1,$$

а $\sin 3x + 5 = 6$ и данное уравнение не удовлетворяется. Итак, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2. ПЕРИОДИЧНОСТЬ.

Периодичность — одно из важнейших свойств тригонометрических функций и учащиеся должны хорошо его понимать.

Поэтому в своей работе мы уделяем большое внимание решению специальных упражнений, в которых или требуется найти период данной функции, или используется свойство периодичности.

Задачи на нахождение периода тригонометрической функции помещены во всех задачниках по тригонометрии, изданных в последние годы; однако способы решения таких задач иногда вызывают серьезные возражения. Один из способов, применяемых некоторыми авторами для нахождения периода тригонометрической функции, состоит в следующем.

Так как соотношение $f(x + T) = f(x)$ должно иметь место при произвольном значении x, то удачным выбором частного значения для x (например $x = \alpha$) получают соотно-

шение $f(\alpha + T) = f(\alpha) = \text{const}$, дающее возможность определить период T.

Ошибочность этого способа состоит в том, что получаемое соотношение $f(\alpha + T) = f(\alpha)$ выражает условие необходимое, чтобы число T было периодом функции $f(x)$, но не достаточное Поэтому применение этого способа для нахождения периода функции может привести к ошибкам. Найдем, например, этим способом период функции $f(x) = \sin 2x$. Обозначив искомый период через T, мы должны иметь: $\sin [2(x + T)] = \sin 2x$ Это равенство должно быть справедливым при произвольном значении x, поэтому, полагая $x = 0$, получим равенство: $\sin 2T = 0$, которое оправдывается при $2T = \pi$ и тогда $T = \frac{\pi}{2}$, что неверно, ибо при $x = \frac{\pi}{6}$, например, имеем:

$$\sin [2(x + T)] = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) =$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} \neq \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Совершенно очевидно, что период данной функции равен π. Такие же ошибки получаются при решении этим способом большинства таких задач, если при выбранном частном значении аргумента функция равна нулю.

В учебнике по тригонометрии С. И. Новоселова нахождение периодов тригонометрических функций выполнено теоретически совершенно правильно, но способ, применяемый автором, трудно использовать для решения многих подобных задач в средней школе.

В примерах, приведенных ниже, показан способ нахождения периодов тригонометрических функций, которым мы пользуемся в своей практической работе с учащимися.

Пример 1. Найти период функции: $f(x) = \sin 2x$.

Р е ш е н и е. Обозначим искомый период через T, тогда должно иметь место соотношение: $\sin [2(x + T)] = \sin 2x$, откуда $\sin (2x + 2T) - \sin 2x = 0$, или $2 \sin T \cos (2x + T) = 0$. Это условие необходимо и достаточно, чтобы число T было периодом данной функции, ибо при выполнении его получаем первоначальное условие.

В соотношении $\sin T \cos (2x + T) = 0$ число x является произвольным, а T — постоянным, поэтому, вообще го-

воря, $\cos(2x+T)\neq 0$ (например, при $x=-\frac{T}{2}$ имеем $\cos(2x+T)=\cos(-T+T)=\cos 0=1$) и для произвольного x предыдущее равенство может выполняться только тогда, когда $\sin T=0$, откуда $T=\pi$.

Методом, изложенным в § 30 учебника С. И. Новоселова, докажем, что число π есть наименьший положительный период $\sin 2x$. Допустим противное, что положительное число T, меньшее π, есть период $\sin 2x$; тогда равенство $\sin 2(x+T)=\sin 2x$ должно иметь место при всех значениях аргумента x. Выбираем для x такое частное значение, чтобы правая часть равенства стала равна какой-либо известной величине, отличной от нуля. Пусть $x=\frac{\pi}{4}$, тогда $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2T\right)=\sin\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos 2T=1$, что невозможно при $0<T<\pi$. Во всех примерах, помещенных ниже, доказательства выполняются аналогично, поэтому они здесь не приведены; под периодом будем понимать наименьший положительный период.

Пример 2. Найти период функции: $y=\cos nx$..

Р е ш е н и е. Если T — период данной функции, то будем иметь: $\cos n(x+T)=\cos nx$, откуда $\cos(nx+nT)-\cos nx=0$, или $2\sin\frac{nT}{2}\sin\left(nx+\frac{nT}{2}\right)=0$. При произвольном значении x это равенство возможно только при $\sin\frac{nT}{2}=0$, откуда $\frac{nT}{2}=k\pi$; $T=\frac{2k\pi}{n}$ и при $k=1$ находим период данной функции $T=\frac{2\pi}{n}$ (2π — период функции $y=\cos x$).

Легко видеть, что соотношение между периодами функций $\cos x$ и $\cos nx$, установленное в этой задаче, имеет место для всех тригонометрических функций такого вида, что дает возможность быстро находить их периоды. Например, для функции $y=\sin\frac{x}{3}$ период $T=2\pi:\frac{1}{3}=6\pi$; для функции $y=\cos\frac{2}{5}x$ период $T=2\pi:\frac{2}{5}=5\pi$; для функции $y=\operatorname{tg}3x$ период $T=\frac{\pi}{3}$; для функции $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{6}x$ период

$T = \pi : \frac{1}{6} = 6\pi$; для функции $y = \sin 2\pi x$ период $T = 2\pi : 2\pi = 1$.

Пример 3. Найти период функции:

$$f(x) = \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{3}.$$

Решение. Период функции $y = \cos\frac{3x}{2}$ равен $T = 2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$, а период функции $y = \sin\frac{x}{3}$ равен $T = 2\pi : \frac{1}{3} = 6\pi$. Так как наименьшее общее кратное для чисел $\frac{4\pi}{3} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ и $6\pi = 9 \cdot \frac{2\pi}{3}$ есть число $18 \cdot \frac{2\pi}{3} = 12\pi$, то 12π есть период функции $f(x)$.

Действительно,

$$f(x + 12\pi) = \cos\frac{3(x+12\pi)}{2} - \sin\frac{x+12\pi}{3} = \cos\left(\frac{3x}{2} + 18\pi\right) -$$

$$- \sin\left(\frac{x}{3} + 4\pi\right) = \cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{3} = f(x)^*.$$

Пример 4. Найти период функции: $y = \sin^2 x$.

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то период данной функции $T = 2\pi : 2 = \pi$.

Пример 5. Найти период функции: $y = \cos^3 x$.

Решение. Так как $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \times$

$$\times \cos x = \frac{\cos x + \cos 2x \cos x}{2} = \frac{\cos x + \frac{\cos 3x + \cos x}{2}}{2} = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

---

* Как отметил М. Б. Барбан в статье «О нахождении периода тригонометрической функции» («Математика в школе», № 5, 1957), период суммы, вообще говоря, не равен общему наименьшему кратному периодов слагаемых. Но для выражений, с которыми мы встречаемся в средней школе, а именно, для выражений вида: $f(x) = a_1 \sin n_1 x + b_1 \cos n_1 x + \cdots + a_k \sin n_k x + b_k \cos n_k x$ (где n_s — рациональные положительные числа, все различные) наименьший положительный период равен $2\pi k$, где k — общее наименьшее кратное чисел $\frac{1}{n_1}; \frac{1}{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_k}$.

и так как период для $\cos x$ есть 2π, а для $\cos 3x$ число $\frac{2\pi}{3}$, то периодом данной функции будет $2\pi\left(2\pi : \frac{2\pi}{3} = 3\right)$.

Пример 6. Найти период функции $y = \sin(x + \alpha)$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin(x + 2\pi + \alpha) = \sin[(x + \alpha) + 2\pi] = \sin(x + \alpha)$, то периодом данной функции есть число 2π.

Пример 7. Найти период функции $y = \cos(nx + \alpha)$, где n и α — произвольные постоянные числа.

Р е ш е н и е. Обозначая искомый период через T, мы должны иметь:

$$\cos[n(x + T) + \alpha] = \cos(nx + \alpha),$$

или

$$\cos(nx + nT + \alpha) - \cos(nx + \alpha) = 0,$$

откуда

$$-2\sin\left(nx + \frac{nT}{2} + \alpha\right)\sin\frac{nT}{2} = 0.$$

Рассуждая, как и прежде, мы приходим к выводу, что, вообще говоря, $\sin\left(nx + \frac{nT}{2} + \alpha\right) \neq 0$ и для произвольного x последнее равенство возможно только при условии $\sin\frac{nT}{2} = 0$, откуда $\frac{nT}{2} = \pi$ и $T = \frac{2\pi}{n}$. В соотношении $T = \frac{2\pi}{n}$ число 2π есть период функции $y = \cos x$, а от аргумента α полученный период не зависит; поэтому искомый период можно было найти еще и так: мы уже видели, что функция $y = \cos nx$ имеет период $T = \frac{2\pi}{n}$; проверим, не является ли число $\frac{2\pi}{n}$ периодом и для функции $y = \cos(nx + \alpha)$. Имеем:

$$\cos\left[n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \alpha\right] = \cos(nx + 2\pi + \alpha) =$$
$$= \cos[(nx + \alpha) + 2\pi] = \cos(nx + \alpha),$$

следовательно, $\frac{2\pi}{n}$ есть период данной функции.

Пример 8. Найти период функции: $y = x + \cos x$.

Р е ш е н и е. Если T — период функции, то при всех значениях x должно быть: $x+T+\cos(x+T)=x+\cos x$, откуда $\cos(x+T)-\cos x=-T$, или $-2\sin\frac{T}{2}\sin\left(x+\frac{T}{2}\right)=-T$, откуда $\sin\left(x+\frac{T}{2}\right)=\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}$.

Так как правая часть этого равенства есть число постоянное, а левая часть изменяется с изменением x, то не существует такого числа T, при котором это равенство удовлетворялось бы при любом x, следовательно, данная функция не является периодической.

Пример 9. Доказать, что функция $y=\sin\sqrt{x}$ не является периодической.

Р е ш е н и е. Допустимые значения аргумента: $x\geqslant 0$. Применение способа, изложенного в предыдущей задаче, вызывает здесь значительные трудности; в таких задачах удобно вести доказательство методом от противного. Итак, допустим, что существует число $T\neq 0$ такое, что $\sin\sqrt{x+T}=\sin\sqrt{x}$. Это равенство должно выполняться при всех допустимых значениях x, поэтому доказательство требуемого утверждения можно свести к тому, чтобы при некоторых (удачно выбранных) частных значениях x получить несовместную систему равенств.

Значение $x=0$ является почти всегда удобным для этой цели, ибо дает простейшее уравнение для T; в данном случае:

$$\sin\sqrt{T}=\sin 0=0, \text{ откуда } \sqrt{T}=k\pi.$$

Теперь, зная что $\sin\sqrt{T}=0$, вторым значением можно взять $x=T$ и тогда получим $\sin\sqrt{2T}=\sin\sqrt{T}=0$, откуда $\sqrt{2T}=n\pi$; подставляя сюда значение $\sqrt{T}=k\pi$, получим $\sqrt{2}\cdot k\pi=n\pi$, откуда $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$, что невозможно при целых n и k.

Пример 10. Найти период функции: $y=|\cos x|$.

Р е ш е н и е. Известно, что равенство $|a|=|b|$ может иметь место в двух случаях: 1) $a=b$; 2) $a=-b$.

Обозначим через T период данной функции, тогда при всех x должно быть: $|\cos(x+T)| = |\cos x|$, что возможно в двух случаях:

1) $\cos(x+T) = \cos x$; так как это равенство выражает свойство периодичности функции $\cos x$, то $T = 2\pi n$.

2) $\cos(x+T) = -\cos x$; $\cos(x+T) + \cos x = 0$, или $2\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)\cos\frac{T}{2} = 0$, откуда $\cos\frac{T}{2} = 0$; $\frac{T}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $T = (2n+1)\pi$.

Таким образом, первое равенство выполняется, если числу T придавать значения 2π; 4π; 6π; ..., а второе равенство выполняется при таких значениях T: π; 3π; 5π;... . Так как заданное соотношение $|\cos(x+T)| = |\cos x|$ выполняется в любом из этих двух случаев, то ему удовлетворяют следующие значения T: π; 2π; 3π; 4π; 5π; 6π; ... Отсюда следует, что периодом данной функции есть число π.

Пользуясь тождеством $|\cos x| = \sqrt{\cos^2 x}$, можно свести задачу нахождения периода функции $|\cos x|$ к нахождению периода функции $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, т. е. к нахождению периода функции $\cos 2x$, а он, как мы видели выше, равен π.

Пример 11. Найти период функции $y = |\sin 2x|$.

Р е ш е н и е. Так как

$$|\sin 2x| = \sqrt{\sin^2 2x} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos 4x)},$$

то период данной функции равен $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 12. Найти период функции: $y = |\operatorname{tg} 3x|$.

Р е ш е н и е. Область определения данной функции: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}$.

Использование тождества $|\operatorname{tg} 3x| = \sqrt{\operatorname{tg}^2 3x}$ здесь не упрощает решения задачи. Из равенства $|\operatorname{tg} 3(x+T)| = |\operatorname{tg} 3x|$ получаем:

1) $\operatorname{tg} 3(x+T) = \operatorname{tg} 3x$ и, следовательно, $3T = \pi n$; $T = n \cdot \frac{\pi}{3}$.

2) $\operatorname{tg} 3(x+T) = -\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{tg} 3(x+T) + \operatorname{tg} 3x = 0$, или $\frac{\sin(6x+3T)}{\cos 3x \cos(3x+3T)} = 0$; но при любом x и постоянном T, вообще говоря, $\sin(6x+3T) \neq 0$ и, следовательно, это равенство невозможно. Период данной функции равен $\frac{\pi}{3}$.

Ко всем 9 примерам из задачника Стратилатова [№ 277 (4д—з); 278 (4а—д)] на нахождение периодов тригонометрических функций, содержащих абсолютные величины, ответы не даны; приводим эти ответы:

277. 4. д) π; е) π; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) $\frac{\pi}{3}$;

278. 4. а) π; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 2π; д) $\frac{\pi}{2}$.

Ясно, что изложенный способ нахождения периода тригонометрической функции можно применять только после изучения формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Между тем некоторые авторы задачников помещают такие задачи до изучения этих формул. Даже в этом случае мы считаем недопустимым и с точки зрения математики и с точки зрения методики преподавания давать учащимся тот ошибочный способ решения, о котором мы говорили выше (даже с соответствующими предостережениями относительно выбора частных значений аргумента). Более удачным, хотя и не безупречным, мы считаем такой прием.

Пусть требуется найти период функции: $y = \sin \frac{3}{5} x$. Обозначим искомый период через T, тогда должно быть:

$$\sin\left[\frac{3}{5}(x+T)\right] = \sin \frac{3}{5} x, \text{ или } \sin\left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}T\right) = \sin \frac{3}{5} x;$$

если обозначим $\frac{3}{5}x = y$, то придем к соотношению:

$$\sin\left(y + \frac{3}{5}T\right) = \sin y.$$

По свойству периодичности функции $\sin y$ имеем:

$$\sin(y + 2k\pi) = \sin y,$$

сопоставляя это равенство с предыдущим, получаем: $\frac{3}{5}T=$ $= 2k\pi$, откуда $T = \frac{10}{3}k\pi$ и наименьший положительный период при $k = 1$ будет: $T = \frac{10\pi}{3}$.

Изложенный прием можно дать и в другом варианте. Имеем:

$$\sin\frac{3}{5}x = \sin y = \sin(y+2\pi) = \sin\left(\frac{3}{5}x+2\pi\right) = \sin\frac{3}{5}\left(x+\frac{10\pi}{3}\right);$$

таким образом, число $T = \frac{10\pi}{3}$ удовлетворяет соотношению: $\sin\frac{3}{5}x = \sin\frac{3}{5}(x+T)$, которое и выражает свойство периодичности. Легко доказать, что $\frac{10\pi}{3}$ есть наименьший положительный период.

Для закрепления общего определения периодической функции мы обычно решаем с учащимися еще следующие две задачи.

Пример 13. Если при произвольном x и постоянном a имеет место равенство: $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, то $f(x)$ — периодическая функция с периодом $2a$. Доказать.

Р е ш е н и е. Обозначая $x + a = y$, мы на основании данного соотношения находим:

$$f(x+2a) = f(x+a+a) = f(y+a) = \frac{1-f(y)}{1+f(y)} = \frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)}.$$

Заменяем в последнем выражении $f(x+a)$ его значением, находим:

$$f(x+2a) = \frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)} = \frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Равенство $f(x+2a) = f(x)$ доказывает требуемое.

Пример 14. Если при произвольном x и постоянном a имеет место равенство: $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, то $f(x)$ — функция периодическая с периодом $4a$. Доказать.

Р е ш е н и е. Обозначая $x+a=y$, мы на основании данного соотношения находим:

$$f(x+2a)=f(x+a+a)=f(y+a)=\frac{1+f(y)}{1-f(y)}=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}.$$

Заменяя в последнем выражении $f(x+a)$ его значением, получим:

$$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-1-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}.$$

Соотношение $f(x+2a)=-\frac{1}{f(x)}$ показывает, что если в функции $f(x)$ к аргументу x прибавить число $2a$, то мы получим число, обратное по величине и противоположное по знаку числу $f(x)$.

Теперь легко понять, что, повторяя эту операцию дважды, мы получим число $f(x)$. Действительно, обозначая $x+2a=z$, находим:

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=f(z+2a)=-\frac{1}{f(z)}=$$

$$=-\frac{1}{f(x+2a)}=\frac{-1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x).$$

Следовательно, $f(x+4a)=f(x)$, что и доказывает требуемое.

3. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ.

Наряду с периодичностью важным свойством тригонометрических функций является их свойство быть четными или нечетными. Это свойство осознается учащимися нелегко и часто, когда не решаются специально подобранные примеры, учащиеся запоминают его чисто формально. Нередко учащиеся смешивают понятие четности функции с ее положительными значениями; так, иногда от учащихся

можно услышать такой ответ: «cos $(\alpha - \beta)$ будет всегда положительным, так как косинус функция четная»; иногда учащиеся ошибочно считают, что функции вообще бывают только или четными, или нечетными.

Определения, данные в учебнике С. И. Новоселова, нам кажутся несколько трудными для учащихся, поэтому вначале мы их заменяем такими:

Функция $\Phi(x)$ называется четной, если при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т. е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$.

Функция $\Phi(x)$ называется нечетной, если при изменении знака аргумента она изменяет только свой знак, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

На приводимых ниже примерах показано, как мы решаем с учащимися задачи, связанные с установлением четности или нечетности данной функции.

Пример 1. Показать, что функция $\Phi(x) = \dfrac{x + \sin x}{\cos x}$ является нечетной.

Решение. Вычисляем $\Phi(-x)$:

$$\Phi(-x) = \frac{-x+\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-x-\sin x}{\cos x} = -\frac{x+\sin x}{\cos x} = -\Phi(x),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Показать, что функция $\Phi(x) = \dfrac{\arccos x - \operatorname{arc\,ctg} x}{x^2 \arcsin x}$ является четной.

Решение. Вычисляем $\Phi(-x)$:

$$\Phi(-x) = \frac{\arccos(-x)-\operatorname{arc\,ctg}(-x)}{(-x)^2 \arcsin(-x)} = \frac{\pi-\arccos x-\pi+\operatorname{arc\,ctg} x}{x^2(-\arcsin x)} =$$

$$= \frac{\arccos x - \operatorname{arc\,ctg} x}{x^2 \arcsin x} = \Phi(x).$$

Пример 3. Установить, является ли функция $\Phi(x) = \sin x + 2$ четной, нечетной или ни четной, ни нечетной.

Решение. Вычисляем $\Phi(-x)$:

$$\Phi(-x) = \sin(-x) + 2 = 2 - \sin x.$$

Таким образом, при изменении знака аргумента данная функция изменяет свою абсолютную величину и не является ни четной, ни нечетной.

Пример 4. Определить, какие функции являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $|\sin 2x|$; б) $\sqrt{\sin 3x}$; в) $\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$; г) $2^{\cos x}$; д) $2^{\operatorname{tg} x}$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

Решения. а) $f(-x)=|\sin(-2x)|=|-\sin 2x|=|\sin 2x|=f(x)$; функция четная.

б) $f(-x)=\sqrt{\sin(-3x)}=\sqrt{-\sin 3x}$; функция не является ни четной, ни нечетной.

в) $f(-x)=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}(-x)}=\sqrt[3]{-\operatorname{ctg} x}=-\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}=-f(x)$; функция нечетная.

г) $f(-x)=2^{\cos(-x)}=2^{\cos x}=f(x)$; функция четная.

д) $f(-x)=2^{\operatorname{tg}(-x)}=2^{-\operatorname{tg} x}=\frac{1}{2^{\operatorname{tg} x}}=\frac{1}{f(x)}$; функция не является ни четной, ни нечетной.

е) $f(-x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 5. Если $f(x)$ — произвольная функция, то функция $F(x)=f(x)+f(-x)$ является четной, а функция $\Phi(x)=f(x)-f(-x)$ является нечетной. Доказать.

Решение. Действительно, $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$; $\Phi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-\Phi(x)$.

Доказанное утверждение показывает, что всякую функцию можно представить как сумму четной и нечетной функций, действительно,

$$f(x)=\frac{F(x)}{2}+\frac{\Phi(x)}{2}.$$

Пример 6. Уравнение $\Phi(x)+10=0$, где $\Phi(x)$ — нечетная функция, имеет корень $x=a$. Найти корень уравнения $\Phi(x)-10=0$

Р е ш е н и е. По условию $\Phi(a) + 10 = 0$, откуда $\Phi(a) = -10$. В силу нечетности функции $\Phi(x)$, имеем: $\Phi(-a) = -\Phi(a) = 10$, т. е. $\Phi(-a) - 10 = 0$, таким образом, число $-a$ есть корень уравнения $\Phi(x) - 10 = 0$.

Эта задача становится более легкой, если ее сформулировать так: «Уравнение $\Phi(x)+10=0$, где $\Phi(x)$—нечетная функция имеет корень $x = a$. Доказать, что уравнение $\Phi(x) - 10 = 0$ имеет корень $x = -a$».

4. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ.

Несмотря на то что высшая математика дает общие способы нахождения экстремальных значений функций, решение таких задач элементарными средствами имеет большое значение в средней школе, так как дает возможность глубже изучить свойства функций; к тому же иногда экстремальные значения функций элементарными средствами находятся быстрее и проще, чем при помощи вычисления производных.

Решая подобные задачи, необходимо иметь в виду, что только функции синус и косинус имеют экстремальные значения на множестве всех действительных чисел, остальные тригонометрические функции могут иметь такие значения только на определенном интервале.

Сначала рассмотрим несколько простых, но важных примеров (такие примеры помещены в задачнике П. В. Стратилатова, № 268).

1) Функция $y = 1 + 2\sin 2x$ достигает наибольшего (и наименьшего) значения одновременно с функцией $\sin 2x$, следовательно, при $\sin 2x = 1$ данная функция достигает наибольшего значения $y_{max} = 3$, а при $\sin 2x = -1$ функция принимает наименьшее значение $y_{min} = -1$.

2) Функция $y = 1 - \cos\frac{x}{2}$ достигает максимума, когда $\cos\frac{x}{2}$ достигает минимума, и, наоборот, функция y достигает минимума, когда $\cos\frac{x}{2}$ достигает максимума, следовательно, $y_{max} = 2$ при $\cos\frac{x}{2} = -1$ и $y_{min} = 0$ при $\cos\frac{x}{2} = 1$.

3) Функция $y = \sin^2 x$ достигает максимума $y_{\max} = 1$ при $\sin x = 1$ и при $\sin x = -1$, функция достигает минимума $y_{\min} = 0$ при $\sin x = 0$.

4) Функция $y = 3\cos^2 3x + 5\sin^2 3x = 3 + 2\sin^2 3x$ имеет максимум $y_{\max} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ при $\sin 3x = \pm 1$ и минимум $y = 3 + 2 \cdot 0 = 3$ при $\sin 3x = 0$.

5) Функция $y = 1 + |\sin x|$ достигает максимума $y_{\max} = 2$ при $\sin x = 1$ и при $\sin x = -1$, а минимума $y_{\min} = 1$ при $\sin x = 0$.

6) Функция $y = \dfrac{5}{\cos x}$ не имеет экстремальных значений на множестве всех действительных чисел, так как при приближении аргумента x к значениям $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ знаменатель приближается к нулю, а функция становится неограниченной.

7) Функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $y = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$ не имеют наибольших значений.

Для нахождения экстремальных значений более сложных функций чаще всего заданное выражение преобразуют так, чтобы переменный аргумент содержался только у одной тригонометрической функции (синус или косинус).

Пример 1. При каком значении аргумента x в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ функция $y = \sin x + \cos x$ достигает наибольшего значения? Найти это значение.

Р е ш е н и е. Вычисляем $y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$. Так как $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, поэтому $y > 0$ и, следовательно, $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$. Теперь переменный аргумент x содержится только у одной функции ($\sin 2x$). Так как $0 < 2x < \pi$, то y будет иметь наибольшее значение при $2x = \dfrac{\pi}{2}$, или $x = \dfrac{\pi}{4}$. Итак, $y_{\max} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Данное выражение можно преобразовать и так:

$$y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$, поэтому наибольшее значение функция y достигает тогда, когда $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, т. е. при $x-\frac{\pi}{4}=0$ или $x=\frac{\pi}{4}$; $y_{\max}=\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$, если $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное выражение так:

$$y=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=$$
$$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Наименьшее значение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ равно -1, поэтому наименьшее значение функции y будет: $y_{\min}=-2$. Так как $0\leqslant x\leqslant\pi$, то $0\leqslant 2x\leqslant 2\pi$ и $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 1\frac{5}{6}\pi$, поэтому синус достигает значения -1 при $2x-\frac{\pi}{6}=1\frac{1}{2}\pi$, или $x=\frac{5}{6}\pi$.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin x+2\cos x, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

Р е ш е н и е. Можно принять $2=\operatorname{tg}\gamma$, но лучше данную функцию разделить и помножить на $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, тогда получим: $y=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=$

$=\sqrt{5}(\cos\gamma\sin x+\sin\gamma\cos x)=\sqrt{5}\sin(x+\gamma)$, где $\gamma=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, причем $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $y_{\max}=\sqrt{5}$ и достигается при $x+\gamma=\frac{\pi}{2}$, т. е. при

$$x=\frac{\pi}{2}-\gamma=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}46.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=a\cos x+b\sin x.$$

Р е ш е н и е. Решение многих задач приводит к необходимости разыскания экстремальных значений функций такого вида.

Рассмотрим два способа ее решения.

Первый способ. Имеем: $y = a\cos x + b\sin x =$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) =$$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\gamma\cos x + \cos\gamma\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\gamma)$, где $\sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Наибольшее значение $\sin(x+\gamma)$ равно $+1$, а наименьшее равно -1, следовательно,

$$y_{\max} = \sqrt{a^2+b^2};\ y_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}.$$

Второй способ. Из тождества

$$(a\cos x + b\sin x)^2 + (a\sin x - b\cos x)^2 = a^2 + b^2$$

находим

$$a\sin x - b\cos x = \pm\sqrt{a^2+b^2-(a\cos x + b\sin x)^2}.$$

Выражение $a\sin x - b\cos x$ при всех действительных x принимает действительные значения, поэтому должно быть: $a^2+b^2 \geqslant (a\cos x + b\sin x)^2$, откуда $-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a\cos x + b\sin x \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Остается проверить, могут ли иметь место равенства, а это, в свою очередь, сводится к проверке того, имеет ли уравнение $a\sin x - b\cos x = 0$ решения; последнее очевидно.

Следовательно, $y_{\max} = \sqrt{a^2+b^2};\ y_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 5. Найти наибольшее значение функции:

$$y = \sin x\cos^3 x - \sin^3 x\cos x.$$

Р е ш е н и е. Имеем: $y = \sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) =$

$= \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$. Теперь ясно, что $y_{\max} = \frac{1}{4}$.

Пример 6. Найти наибольшее значение функции:

$$y = \sin 2x\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right).$$

Р е ш е н и е. Преобразуя произведение в сумму, находим:

$$y = \sin 2x\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{5} - \cos\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)\right].$$

Полученная разность будет иметь наибольшее значение тогда, когда вычитаемое $\cos\left(4x-\frac{\pi}{5}\right)$ будет иметь наименьшее значение, равное — 1, т. е.

$$y_{\max}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{5}-(-1)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\frac{\pi}{10}\approx 0{,}905.$$

Пример 7. Вершина треугольника находится в центре данного круга радиуса R, а основанием его служит хорда этого круга. Какой угол должен быть при вершине треугольника для того, чтобы площадь его была наибольшей?

Р е ш е н и е. Если обозначить искомый угол через x, то площадь треугольника будет: $S=\frac{1}{2}R\cdot R\sin x=\frac{R^2}{2}\sin x$; она достигает наибольшего значения при $\sin x=1$, т. е. при $x=90°$.

Пример 8. Из всех вписанных в данный круг углов, равных каждый α, найти такой, у которого сумма образующих его хорд наибольшая.

Р е ш е н и е. Концы данных хорд соединим отрезком прямой и в полученном треугольнике обозначим углы, противолежащие хордам, через x и y, тогда по известной лемме данные хорды будут равны $2R\sin x$ и $2R\sin y$, где R—радиус данного круга. Сумма хорд

$$2R\sin x+2R\sin y=2R(\sin x+\sin y)=4R\sin\frac{x+y}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{x-y}{2}=2R\sin\frac{180°-\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$ достигает наибольшего значения при $\cos\frac{x-y}{2}=1$, т. е. при $\frac{x-y}{2}=0$ или $x=y$.

Так как в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине является высотой и медианой и так как перпендикуляр к хорде, проведенный через ее середину, проходит через центр круга, то биссектриса искомого угла должна быть диаметром круга.

Пример 9. Найти наибольшее значение функции $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$* и значение независимой пере-

* В задачнике Р. И. Позойского этот пример помещен в гл. IV под номером 278(а). Ответ к нему дан неполный, так как содержит

менной в границах от 0 до π, при которых функция достигает наибольшего значения.

Р е ш е н и е. Преобразуя произведение в сумму, находим:

$$y = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} + 4x\right)\right].$$

Эта сумма будет иметь наибольшее значение тогда когда слагаемое $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 4x\right)$ достигает максимума, т. е, когда $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 4x\right) = 1$ и тогда $y_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} + 1\right) = 1$.

Так как

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \text{ то } 0 \leqslant 4x \leqslant 4\pi \text{ и } \frac{\pi}{6} \leqslant 4x + \frac{\pi}{6} \leqslant 4\frac{1}{6}\pi.$$

Если угол находится в таких границах, то синус достигает наибольшего значения дважды: при $4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ и $4x + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = 2\frac{1}{2}\pi$.

Таким образом, искомые значения независимой переменной находятся из двух равенств:

$$1)\ 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2};\quad 4x = \frac{\pi}{3};\quad x = \frac{\pi}{12};$$

$$2)\ 4x + \frac{\pi}{6} = 2\frac{1}{2}\pi;\ 4x = 2\frac{1}{3}\pi;\quad x = \frac{7}{12}\pi.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что при этих значениях аргумента функция y принимает значение, равное 1.

Пример 10. В каком прямоугольном треугольнике отношение радиуса r вписанного круга к радиусу R описанного круга имеет наибольшее значение?

только первое из двух найденных нами значений аргумента.

В ответе к задаче № 282 этого же сборника указан только аргумент $\frac{13\pi}{40}$, в действительности условиям задачи удовлетворяют три значения аргумента: $\frac{13\pi}{40}$, $\frac{79\pi}{120}$ и $\frac{119\pi}{120}$.

Р е ш е н и е. По известной формуле $r=\dfrac{c\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

находим (c — гипотенуза):

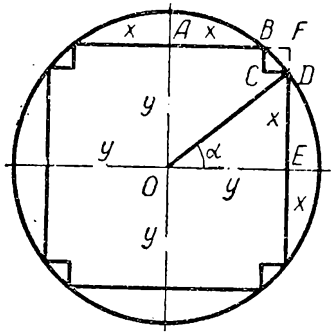
$$r=\frac{c\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{90^\circ-\beta}{2}}{\cos 45^\circ}=c\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

Так как $R=\frac{c}{2}$, то

$$\frac{r}{R}=2\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos(45^\circ-\beta)-\cos 45^\circ\right].$$

Теперь очевидно, что наибольшее значение отношения $\frac{r}{R}$ достигается при наибольшем значении $\cos(45^\circ-\beta)$, а это имеет место при $\beta=45^\circ$, т. е. в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Пример 11. При конструировании трансформатора переменного тока весьма важно как можно больше заполнить железным сердечником крестообразного сечения внутренность катушки круглого сечения. Каковы должны быть размеры x и y сечения сердечника, изображенного на чертеже 1, если радиус катушки равен a?



Черт. 1.

Р е ш е н и е. Обозначим $\angle DOE=\alpha$. Найдем площадь четвертой части сечения сердечника. Если продлить отрезки AB и ED до пересечения в точке F, то искомую площадь можно найти, как разность между площадью квадрата $OAFE$ и площадью квадрата $CBFD$, следовательно,

$$\frac{1}{4}S=y^2-(y-x)^2=y^2-y^2+2xy-x^2=2xy-x^2.$$

Площадь сечения сердечника $S=4(2xy-x^2)$.

Из треугольника ODE находим: $x=a\sin\alpha$; $y=a\cos\alpha$.

Поэтому

$$S = 4(2a^2 \sin\alpha\cos\alpha - a^2\sin^2\alpha) = 4a^2\left(\sin 2\alpha - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2a^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1) = 2a^2\sqrt{2^2+1^2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2a^2\sqrt{5}\left(\sin\varphi\sin 2\alpha + \cos\varphi\cos 2\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2a^2\sqrt{5}\left[\cos(2\alpha - \varphi) - \frac{1}{\sqrt{5}}\right],$$

где $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Теперь ясно, что наибольшего значения площадь достигает при $2\alpha - \varphi = 0$, т. е. при $\alpha = \frac{\varphi}{2}$, причем $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Искомые размеры x и y равны:

$$x = a\sin\alpha = a\sin\frac{\varphi}{2} = a\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = a\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}} =$$

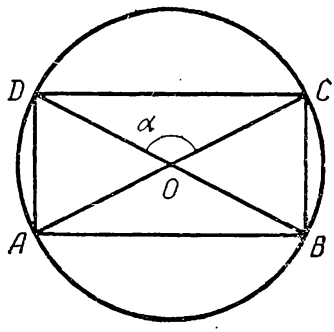
$$= a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = a\sqrt{0{,}5 - 0{,}1\sqrt{5}} \approx 0{,}52\ a;$$

$$y = a\cos\alpha = a\cos\frac{\varphi}{2} = a\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = a\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2}} =$$

$$= a\sqrt{0{,}5 + 0{,}1\sqrt{5}} \approx 0{,}85\ a.$$

Пример 12. Из цилиндрического бревна нужно выпилить брус с прямоугольным сечением наибольшего объема. Как это сделать?

Р е ш е н и е. Так как длина бревна не изменяется, то задача сводится к тому, чтобы вписать в данный круг прямоугольник $ABCD$ (черт. 2) с наибольшей площадью. Пусть диагонали искомого прямоугольника образуют между собой угол α, т. е. $\angle COD = \alpha$; диаметр сечения данного бревна обозначим через d.



Черт. 2.

Площадь прямоугольника $S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$.

Теперь очевидно, что площадь достигает наибольшего значения при $\alpha = 90°$.

Итак, брус имеет наибольший объем, если сечение его есть квадрат, вписанный в сечение цилиндрического бревна.

Пример 13. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием a и данным углом α при вершине наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Р е ш е н и е. Обозначим два других угла треугольника через x и y. Тогда площадь треугольника будет:

$$S = \frac{a^2 \sin x \sin y}{2 \sin \alpha} = \frac{a^2[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{4 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{a^2[\cos(x-y) + \cos \alpha]}{4 \sin \alpha}.$$

Теперь ясно, что наибольшее значение площадь достигает вместе с функцией $\cos(x-y)$, т. е. при $\cos(x-y) = 1$, что для углов треугольника возможно только при $x - y = 0$, откуда $x = y$, что и требовалось доказать.

Пример 14. Найти наибольшее значение периметра прямоугольного треугольника, имеющего данную гипотенузу c.

Р е ш е н и е. Очевидно, что периметр $a + b + c$ данного треугольника достигает наибольшего значения при наибольшем значении суммы катетов $a + b$.

Обозначим один из острых углов данного треугольника через x, тогда катеты треугольника будут равны $c \sin x$ и $c \cos x$, а их сумма:

$$c \sin x + c \cos x = c[\sin x + \sin(90° - x)] =$$

$$= 2c \sin 45° \cos(45° - x) = c\sqrt{2} \cos(45° - x).$$

Наибольшее значение эта сумма достигает при $\cos(45° - x) = 1$ и тогда она равна $c\sqrt{2}$. Это имеет место при $x = 45°$, т. е. в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Пример 15. Найти наименьшее значение площади прямоугольного треугольника, имеющего данную высоту h, проведенную к гипотенузе.

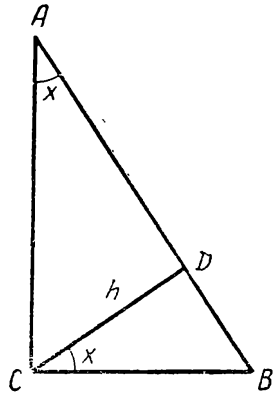
Р е ш е н и е. Обозначим один из углов данного треугольника (черт. 3) через x (на чертеже угол A). Из треугольника ACD находим: $AC = \frac{CD}{\sin x} = \frac{h}{\sin x}$.

Из треугольника ABC находим гипотенузу:

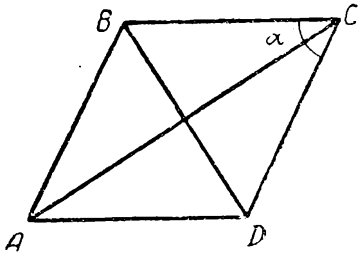
$$AB = \frac{AC}{\cos x} = \frac{h}{\sin x \cos x} = \frac{2h}{\sin 2x}.$$

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{h^2}{\sin 2x}.$$



Черт. 3.



Черт. 4.

Последнее выражение имеет наименьшее значение тогда, когда знаменатель имеет наибольшее значение, т. е. при $\sin 2x = 1$ и $x = 45°$.

Искомое наименьшее значение площади $S = h^2$ и достигается в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Пример 16. В каких границах может изменяться отношение k периметра ромба к сумме его диагоналей?

Р е ш е н и е. Обозначим сторону ромба через a, тогда периметр $P = 4a$.

Обозначим угол ромба (черт. 4) через α, тогда диагонали его будут равны $2a \sin\frac{\alpha}{2}$ и $2a \cos\frac{\alpha}{2}$, а искомое отношение

$$k = \frac{4a}{2a\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \sin\alpha}}$$

Ясно, что $0° < \alpha < 180°$ и поэтому $0 < \sin\alpha < 1$.

Наибольшее значение $\sin\alpha = 1$ будет при $\alpha = 90°$, при этом, очевидно, k будет иметь наименьшее значение $k_{\min} = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$.

Наименьшее значение $\sin\alpha$ принимать не может, ибо $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 180°$, но когда $\alpha \to 0$, или $\alpha \to 180°$, тогда $\sin\alpha \to 0$ и $k \to 2$.

Таким образом, величина k может изменяться в границах: $\sqrt{2} \leqslant k < 2$.

Пример 17. В каком прямоугольном треугольнике отношение k радиуса вписанной окружности к периметру будет наибольшим?

Р е ш е н и е . Известно, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле: $r = p - c$, где p — полупериметр, а c — гипотенуза треугольника (эту формулу можно получить из формулы $\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{r}{p-c}$ при $c = 90°$).

Если обозначить один из острых углов треугольника через α, то катеты будут равны $c\sin\alpha$ и $c\cos\alpha$, а периметр

$$2p = c + c\sin\alpha + c\cos\alpha = c(1+\cos\alpha) + c\sin\alpha = 2c\cos^2\frac{\alpha}{2} +$$

$$+ 2c\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2c\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 4c\cos\frac{\alpha}{2}\cos 45°\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= c\sqrt{2}\,[\cos 45° + \cos(45° - \alpha)\,].$$

Теперь находим k:

$$k = \frac{r}{2p} = \frac{p-c}{2p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{p}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\cos 45° + \cos(45° - \alpha)}\right].$$

Отношение k будет иметь наибольшее значение тогда, когда вычитаемое будет наименьшим, а последнее будет иметь место при наибольшем значении знаменателя дроби, т. е. при наибольшем значении $\cos(45° - \alpha)$.

Так как $0° < \alpha < 90°$, то $45° > 45° - \alpha > -45°$ и, следовательно, наибольшее значение $\cos(45° - \alpha)$ достигается при $45° - \alpha = 0$, т. е. при $\alpha = 45°$.

Таким образом, наибольшее значение k достигается в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

5. ГРАФИКИ.

Построение графиков по точкам мы одновременно соединяем с рассмотрением свойств функции и геометрическим истолкованием этих свойств. Знание некоторых свойств функции значительно облегчает построение ее графика и, наоборот, имея график функции, легко установить многие ее свойства.

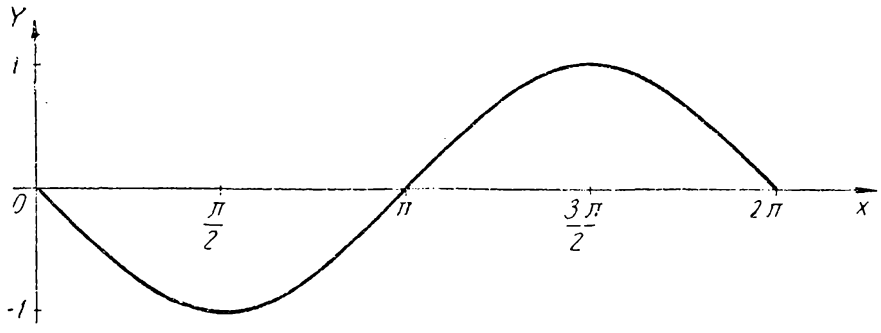
Чаще всего мы устанавливаем следующие свойства функций: область определения, множество значений функций, четность или нечетность, периодичность, наибольшее и наименьшее значения, нули функции, возрастание и убывание.

Пример 1. Построить график функции $y = -\sin x$.

Р е ш е н и е. Функция определена на всем множестве действительных чисел, следовательно, график ее будет простираться вдоль всей оси абсцисс. Функция периодическая с периодом 2π, поэтому достаточно построить график на сегменте $[0; 2\pi]$, охватывающем период данной функции, и затем периодически продолжить построенный график. Наибольшее значение $y_{max}=1$, наименьшее $y_{min}=-1$, а множеством значений функции является сегмент $[-1; 1]$; графически эти свойства выразятся в том, что если провести две прямые, параллельные оси абсцисс на расстоянии равном 1 от нее в верхней и нижней полуплоскости, то график функции не выйдет за границы этой полосы. Функция нечетная, поэтому график будет симметричным относительно начала координат. Полагая $\sin x = 0$, находим нули функции: $x = k\pi$, следовательно, график функции пересекает ось абсцисс в точках $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Когда аргумент x увеличивается от 0 до $\frac{\pi}{2}$, функция убывает от 0 до -1, во второй четверти функция возрастает от -1 до 0, в третьей четверти возрастает от 0 до 1 и в четвертой четверти убывает от 1 до 0. Из равенства $-\sin x = \sin(x + \pi)$ следует, что графиком функциии $y = -\sin x$ является обычная синусоида $y = \sin x$, сдвинутая влево в направлении оси абсцисс на расстояние π; при любом значении аргумента x ордината

графика $y = -\sin x$ равна по величине и противоположна по знаку ординате обычной синусоиды $y = \sin x$. График функции показан на чертеже 5.

Разумеется, что нет необходимости столь подробно рассматривать каждую функцию, но время от времени сле-

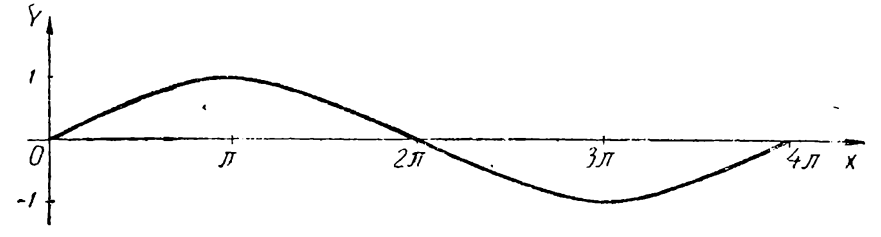


Черт. 5.

дует те или иные свойства функции истолковывать графически до построения графика.

Пример 2. Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$.

Р е ш е н и е. Область определения есть интервал $(-\infty; \infty)$, множеством значений является сегмент $[-1; 1]$.



Черт. 6.

Наибольшее значение $y_{max} = 1$, наименьшее $y_{min} = -1$. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом $T = 4\pi$; функция нечетная. При увеличении аргумента от 0 до π функция возрастает от 0 до 1, при увеличении аргумента от π до 2π функция убывает от 1 до 0, при возрастании аргумента от 2π до 3π функция убывает

от 0 до -1 и при возрастании аргумента от 3π до 4π функция возрастает от -1 до 0. Функция обращается в нуль при $x = 2k\pi$.

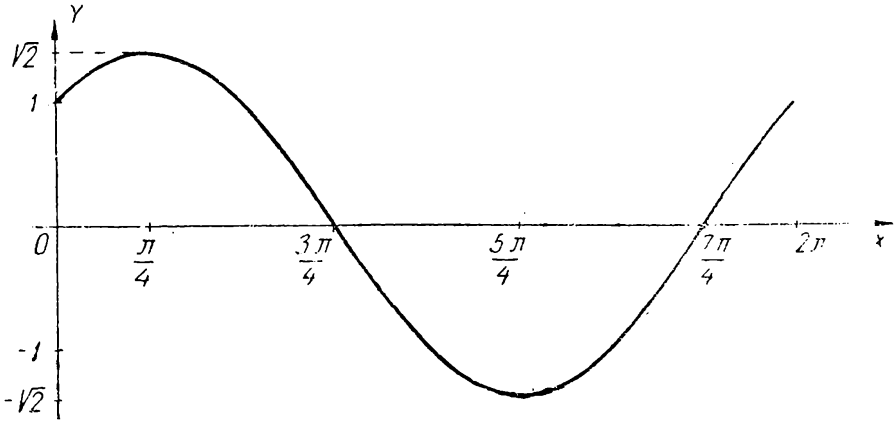
График функции изображен на чертеже 6.

Этот график получается растяжением обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ в два раза в направлении от оси ординат.

Пример 3. Построить график функции $y = \sin x + \cos x$.

Р е ш е н и е. График данной функции можно получить путем сложения соответствующих ординат графиков $y = \sin x$ и $y = \cos x$, но лучше данную функцию представить в виде:

$$y = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$



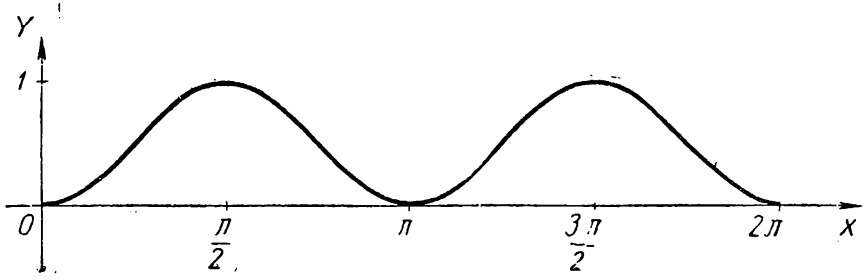
Черт. 7.

Область определения есть интервал $(-\infty\ ;\ \infty)$; множество значений есть сегмент $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; $y_{max} = \sqrt{2}$, $y_{min} = -\sqrt{2}$; период $T = 2\pi$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Функция обращается в нуль в точках $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$. График функции показан на чертеже 7. Этот график получается растяжением обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ в $\sqrt{2}$ раз и перенесением начала координат в точку $\left(-\frac{\pi}{4};\ 0\right)$. На графике видно, что при увели-

чении аргумента от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$ функция возрастает от 0 до $\sqrt{2}$, при увеличении аргумента от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{4}$ функция убывает от $\sqrt{2}$ до $-\sqrt{2}$, при увеличении аргумента от $\frac{5\pi}{4}$ до $\frac{7\pi}{4}$ функция возрастает от $-\sqrt{2}$ до 0.

Пример 4. Построить график функции $y = \sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Переписываем данную функцию в виде: $y = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Функция четная, периодическая с наи-

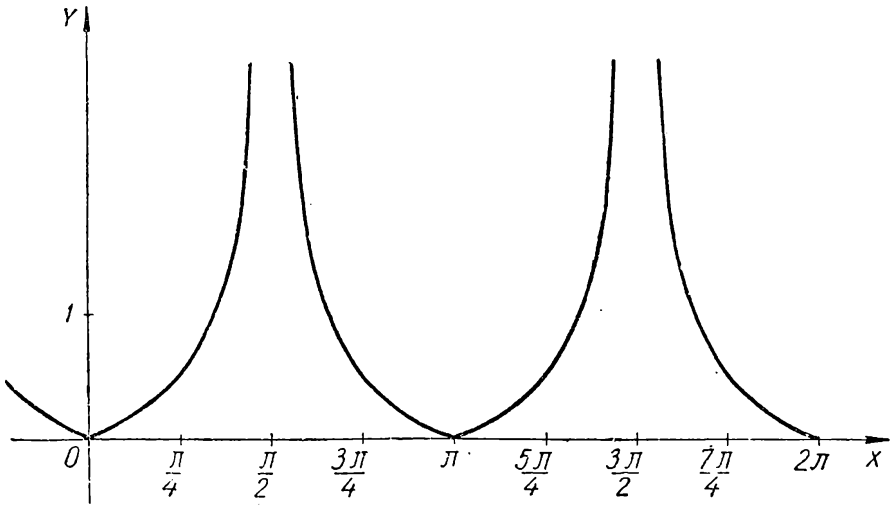


Черт. 8.

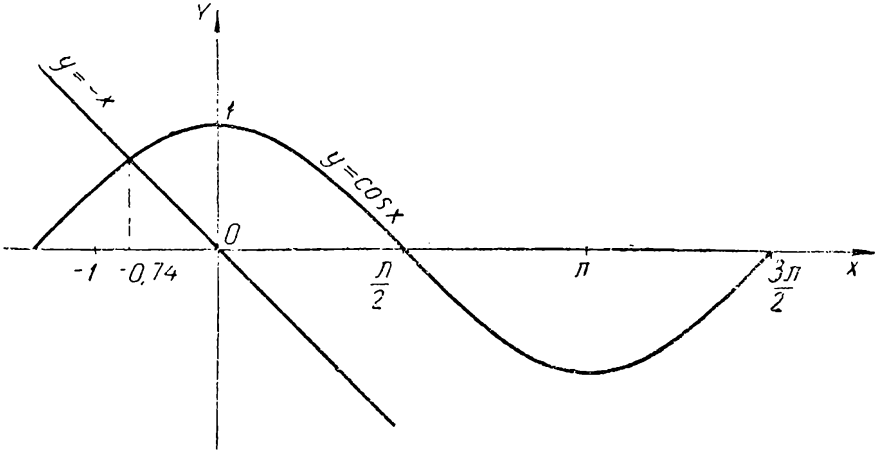
меньшим положительным периодом π; $y_{max} = 1$, $y_{min} = 0$; при всех значениях x имеем $y \geqslant 0$ (график располагается над осью абсцисс); $y = 0$ при $x = k\pi$. График функции изображен на чертеже 8.

Пример 5. Построить график функции $y = |\operatorname{tg} x|$.

Р е ш е н и е. Область определения есть интервал $(-\infty; \infty)$; множество значений есть полуинтервал $0 \quad y < \infty$; $y_{min} = 0$; функция четная; периодическая с наименьшим псложительным периодом π; $y = 0$ при $x = k\pi$. Если $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, то $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$ и график данной функции совпадает с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$, если же $\operatorname{tg} x < 0$, то $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$ и ординаты графика данной функции равны соответствующим ординатам функции $y = \operatorname{tg} x$, но противоположны по знаку. График данной функции изображен на чертеже 9.



Черт. 9.

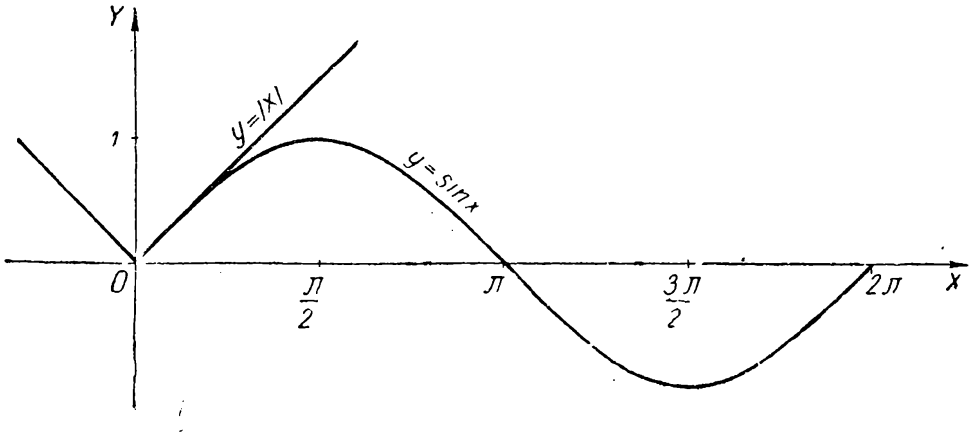


Черт. 10.

Пример 6. Решить уравнение $\cos x + x = 0$.

Р е ш е н и е. Переписав уравнение в виде $\cos x = -x$, строим графики функций $y = \cos x$ и $y = -x$, и находим абсциссу точки пересечения $x \approx -0{,}74$ (черт. 10).

Пример 7. Решить уравнение: $\sin x = |x|$.



Черт. 11.

Р е ш е н и е. Строим графики функций $y = \sin x$ и $y = |x|$ и находим абсциссу точки их пересечения: $x = 0$ (черт. 11).

IV. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ.

Необходимость в исключении параметров из системы равенств возникает не только во многих задачах высшей математики, но и в некоторых задачах элементарной математики (изображение комплексных чисел в тригонометрической форме, нахождение условий совместности системы уравнений и т. д.).

Решение задач на исключение параметров из системы равенств, содержащих тригонометрические функции, в значительной мере способствует развитию сообразительности учащихся и закреплению навыков в выполнении тригонометрических преобразований.

К тому же такие задачи дают возможность разнообразить упражнения, решаемые для закрепления теоретического материала.

Решение этих задач мы не относим к какой-нибудь одной теме, а решаем их попутно с изучением различного теоретического материала, с решением задач по тому или иному разделу.

Общий метод исключения параметров из системы двух уравнений состоит в том, что решают одно из данных уравнений относительно параметра (если это возможно) и найденное для него значение подставляют во второе из данных уравнений.

Так, например, если в системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x,\ a) = 0; \\ \Phi(x,\ a) = 0; \end{cases}$$

можно одно из уравнений (например, первое) решить относительно a, то, подставляя $a = \varphi(x)$ во второе уравнение, найдем искомый результат исключения $\Phi[x,\ \varphi(x)] = 0$.

Однако применение некоторых искусственных приемов дает иногда возможность получить результат исключения значительно проще.

Чаще всего при решении задач на исключение параметров используются те же идеи и формулы, что и при решении других задач данной темы.

При исключении параметров из данной системы уравнений мы получаем, вообще говоря, необходимые (но не достаточные) условия совместности данной системы, поэтому вполне допустимыми являются и такие преобразования, при которых могут быть введены посторонние корни (например, возведение обеих частей уравнения в квадрат).

Ниже мы приводим задачи, которые обычно решаем с учащимися.

Пример 1. (К теме «Основные тригонометрические тождества»). Исключить α и β из системы равенств:

а) $\begin{cases} x = 2\cos\alpha; \\ y = 2\sin\alpha; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{\cos\alpha}; \\ y = 2\operatorname{tg}\alpha; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha = 1; \\ a\cos^2\beta + b\sin^2\beta = 1; \\ a\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\beta; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a; \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b; \\ (x^2 + y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$

Р е ш е н и я а) Так как $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, то, подставляя $\cos\alpha = \dfrac{x}{2}$ и $\sin\alpha = \dfrac{y}{2}$, получим: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, или

$x^2 + y^2 = 4$. Таким образом, заданная система равенств является параметрическим уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Такой же результат мы получим и в том случае, если из первого уравнения определим $\cos\alpha = \frac{x}{2}$ и подставим во второе уравнение: $y = \pm 2\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. Но можно из первого уравнения определить сразу параметр α: $\alpha = \arccos\frac{x}{2}$ и представить результат исключения так: $y = 2\sin\left(\arccos\frac{x}{2}\right)$.

б) Из первого равенства находим $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{x}{3}$ и так как

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha = 1, \text{ то } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

в) Формула $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ дает возможность из первых двух уравнений определить $\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\beta$; с этой целью разделим обе части этих уравнений соответственно на $\cos^2\alpha$ и $\cos^2\beta$, получим:

$$\begin{cases} a\operatorname{tg}^2\alpha + b = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha \\ a + b\operatorname{tg}^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\beta, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-b}{a-1}$; $\operatorname{tg}^2\beta = \frac{a-1}{1-b}$.

Возведя обе части третьего равенства в квадрат и заменяя $\operatorname{tg}^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\beta$ их значениями, получим:

$$a^2 \cdot \frac{1-b}{a-1} = b^2 \cdot \frac{a-1}{1-b}, \text{ или } a^2(1-b)^2 = b^2(a-1)^2,$$

откуда 1) $a(1-b) = b(a-1)$, или $a + b - 2ab = 0$;

2) $a(1-b) = -b(a-1)$, или $a = b$.

г) Возведя левые и правые части первых двух равенств в квадрат и складывая их, найдем:

$$x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) + y^2(\sin^2\beta + \cos^2\alpha) = a^2 + b^2,$$

или $(x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta) = a^2 + b^2$.

Складывая части этого равенства с соответствующими частями третьего равенства, находим:

$$(x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\alpha + \cos^2\beta) = a^2 + b^2 + 2ab,$$

или $2(x^2 + y^2) = (a + b)^2$.

Пример 2. .(К теме «Формулы сложения».)

а) Найти зависимость между числами a, b и γ, зная, что система:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a; \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b; \\ x + y = \gamma; \end{cases}$$

имеет решения (т. е. уравнения совместны).

б) Исключить x из системы равенств:

$$\begin{cases} \cos(\beta + x) = m; \\ \cos(\beta - x) = n; \end{cases}$$

в) Исключить x из системы равенств:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x + \alpha) = m; \\ \operatorname{tg}(x - \beta) = n. \end{cases}$$

Р е ш е н и я. а) Преобразуем второе уравнение: $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = b$, или $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$; подставляя значение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ в первое уравнение, получим: $a = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$, откуда $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{a}{b}$. Из уравнения $x + y = \gamma$ находим: $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg} \gamma$, или $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} \gamma$, откуда $\frac{a}{1 - \frac{a}{b}} = \operatorname{tg} \gamma$, или $\frac{ab}{b - a} = \operatorname{tg} \gamma$.

б) *Первый способ.* Имеем:

$$\begin{cases} \cos\beta \cos x - \sin\beta \sin x = m; \\ \cos\beta \cos x + \sin\beta \sin x = n, \end{cases}$$

откуда $\cos\beta \cos x = \frac{m+n}{2}$; $\sin\beta \sin x = \frac{n-m}{2 \sin\beta}$, следовательно, $\cos x = \frac{m+n}{2 \cos\beta}$; $\sin x = \frac{n-m}{2 \sin\beta}$.

Возведя обе части каждого равенства в квадрат и складывая их, найдем искомое соотношение:

$$1 = \frac{(m+n)^2}{4 \cos^2\beta} + \frac{(n-m)^2}{4 \sin^2\beta}, \text{ или } \frac{(m+n)^2}{\cos^2\beta} + \frac{(n-m)^2}{\sin^2\beta} = 4.$$

Второй способ. Так как

$$(\beta + x) + (\beta - x) = 2\beta, \text{ то } \cos[(\beta + x) + (\beta - x)] = \cos 2\beta,$$

или $\cos(\beta+x)\cos(\beta-x)-\sin(\beta+x)\sin(\beta-x)=\cos 2\beta$,

откуда $mn \pm \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)} = \cos 2\beta$.

в) Из очевидного тождества $\operatorname{tg}[(x+\alpha)-(x-\beta)] =$ $=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ находим: $\frac{\operatorname{tg}(x+\alpha)-\operatorname{tg}(x-\beta)}{1+\operatorname{tg}(x+\alpha)\operatorname{tg}(x-\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, или $\frac{m-n}{1+mn}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

Пример 3. (К теме «Формулы кратных аргументов».) Исключить α из системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=\sin\alpha; \\ y=\cos 2\alpha; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha=a; \\ \sin 2\alpha=b; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha; \\ y=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha; \end{cases}$

г) $\begin{cases} a\operatorname{ctg}\alpha=m; \\ b\sin 2\alpha=n. \end{cases}$

Р е ш е н и я. а) Так как $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, то

$$y=1-2x^2, \text{ или } 2x^2+y=1.$$

б) Из первого уравнения получаем: $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+$ $+\cos^2\alpha=a^2$, следовательно, $1+b=a^2$.

в) Преобразуем правую часть первого уравнения:

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha}=-2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=$$

$=-2\operatorname{ctg}2\alpha$, следовательно, $x=-2\operatorname{ctg}2\alpha$; $\operatorname{ctg}2\alpha=$

$$=-\frac{x}{2};\ \operatorname{tg}2\alpha=-\frac{2}{x}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим:

$$y=-\frac{x}{2}-\frac{2}{x};\ y=-\frac{x^2+4}{2x}.$$

г) Перепишем второе уравнение в виде: $b\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=n$; подставляя из первого уравнения $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{m}$, получим:

$$\frac{2abm}{m^2+a^2}=n.$$

Можно было поступить и так. Перепишем данные уравнения в виде:

$$\begin{cases} \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}=m; \\ 2b\sin\alpha\cos\alpha=n. \end{cases}$$

Перемножим и разделим почленно эти уравнения, тогда получим:

$$\begin{cases} 2ab\cos^2\alpha = mn; \\ \dfrac{2b}{a}\sin^2\alpha = \dfrac{n}{m}; \end{cases}$$ откуда $$\begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{mn}{2ab} \\ \sin^2\alpha = \dfrac{an}{2bm} \end{cases}$$ и, следовательно,

$$1 = \frac{mn}{2ab} + \frac{an}{2bm}.$$

Пример 4. (К теме «Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение».)

Выразить $y = \dfrac{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}$ через $x = 4\cos^2\alpha$.

Решение. Имеем: $x = 2 + 2\cos 2\alpha$; $2\cos 2\alpha = x - 2$.

$$y = \frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = 1 + \frac{\sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{2\sin 6\alpha\cos\alpha}{2\sin 4\alpha\cos\alpha} = 1 + \frac{\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha} = 1 + \frac{3\sin 2\alpha - 4\sin^3 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{3 - 4\sin^2 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = 1 + \frac{4\cos^2 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha} = 1 + \frac{(x-2)^2 - 1}{x-2} =$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}.$$

V. УСЛОВНЫЕ РАВЕНСТВА.

Условными равенствами называют такие соотношения между тригонометрическими функциями, которые имеют место при всех допустимых значениях аргументов, удовлетворяющих определенным заданным соотношениям — дополнительным условиям. Так, например, сумма котангенсов трех аргументов равна произведению котангенсов тех же аргументов не всегда, не при всех произвольных допустимых значениях аргументов, а, например, когда их сумма равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Наиболее часто встречаются условные равенства следующих видов:

1) даются зависимости между аргументами и требуется найти определенные зависимости между тригонометрическими функциями этих аргументов;

2) даются одни зависимости между тригонометрическими функциями аргументов и требуется найти другие зависимости между тригонометрическими функциями тех же аргументов;

3) даются зависимости между тригонометрическими функциями аргументов и требуется найти зависимость между самими аргументами.

Рассмотрим каждый из этих видов задач.

I. Если дополнительное условие дается в виде соотношения между аргументами, то один из способов доказательства требуемого равенства состоит в том, что находят тригонометрическую функцию (обычно одну из тех, которые фигурируют в доказываемом равенстве) от данных аргументов и преобразуют полученное выражение, пока оно не приобретет вид требуемой зависимости

Пример 1. Если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=$ $=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$. Доказать.

Р е ш е н и е. Тождество не может иметь место, если какой-либо из аргументов α, β или γ принимает значение вида $k\pi$.

Так как искомое равенство содержит только котангенсы, то можно сразу находить котангенс левой и правой части данного равенства; но так как левая часть есть сумма трех аргументов, то для упрощения преобразований лучше один из аргументов левой части данного равенства перенести в правую. Таким образом, переписав данное равенство в виде $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$, находим котангенсы левой и правой части этого равенства:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \text{ или } \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma};\ \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, то $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$. Доказать.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Левая часть доказываемого равенства теряет смысл, если α или β принимают значения вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Найдем тангенсы аргументов, стоящих в обеих частях данного соотношения, получим: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$, или

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1,\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta;$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1.$$

Стремясь получить требуемое соотношение, приведем сначала правую часть последнего равенства к нужному виду, для чего достаточно прибавить к обеим частям полученного равенства по 1 (легко видеть, что умножение обеих частей равенства на 2 усложняет задачу):

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1=2;\ 1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta(1+\operatorname{tg}\alpha)=2,$ откуда $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$, что и требовалось доказать.

Однако не всякое условное равенство целесообразно доказывать этим способом, во многих случаях такой способ доказательства вызывает значительные трудности.

Второй способ. Другой способ доказательства условных равенств (с дополнительным условием в виде соотношения между аргументами) состоит в том, что преобразовывают одну часть доказываемого равенства (во второй части можно оставить и нуль), используя заданное соотношение между аргументами, пока не получат вторую часть требуемого соотношения.

Пользуясь равенством $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, преобразуем левую часть искомого соотношения:

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=$$

$$=(1+\operatorname{tg}\alpha)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)=2.$$

Можно поступить и так: $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=[1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta]\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}45^\circ+1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=2.$

Пример 3. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Доказать.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta);\ 2\gamma = 2\pi - (2\alpha + 2\beta)$$

и

$$\sin 2\gamma = \sin[2\pi - (2\alpha + 2\beta)] = -\sin(2\alpha + 2\beta)$$

Теперь преобразуем левую часть доказываемого соотношения:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin(2\alpha + 2\beta) =$$
$$= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) =$$
$$= 2\sin(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] =$$
$$= 4\sin(\alpha + \beta)\sin\alpha\sin\beta = 4\sin(\pi - \gamma)\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Можно преобразовать и правую часть тождества. Для этого, естественно, преобразуем произведения функций в суммы.

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]\sin\gamma =$$
$$= 2\sin\gamma\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\gamma\cos(\pi - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma - \beta) +$$
$$+ \sin(\gamma - \alpha + \beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma = \sin(\pi - \beta - \beta) + \sin(\pi -$$
$$- \alpha - \alpha) + \sin 2\gamma = \sin 2\beta + \sin 2\alpha + \sin 2\gamma.$$

Пример 4. Если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta -$ $- \cos^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$. Доказать.

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)$, поэтому

$$\cos\gamma = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin(\alpha + \beta).$$

Далее находим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha + \beta) =$$
$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \sin^2(\alpha + \beta) =$$
$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha - \beta) +$$
$$+ \cos(\alpha+\beta)] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

II. В некоторых условных равенствах дополнительные условия даются в виде зависимостей не между самими углами, а между тригонометрическими функциями этих углов. Решение таких задач во многих случаях достигается тождественным преобразованием заданного соотношения к виду искомого соотношения. Приведем несколько примеров.

Пример 5. Дано: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta)$. Доказать:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

Р е ш е н и е. Допустимые значения для аргументов: $\alpha \neq (2k+1)\pi$; $\beta \neq (2k+1)\pi$. Кроме того, искомое соотношение невозможно при $\alpha + \beta = 2k\pi$, так как в этом случае $\frac{\alpha}{2} = k\pi - \frac{\beta}{2}$ и тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} \neq \frac{1}{3}$.

Преобразуем заданное соотношение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha+\beta);$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Так как $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, то $\frac{\alpha+\beta}{2} \neq k\pi$ и $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$.

Разделив полученное выше соотношение на $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, получим:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Применение теорем сложения к этим функциям дает возможность получить функции аргументов $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, которые содержатся в искомом соотношении

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

или $3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; разделив обе части этого равенства на $3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$, что и требовалось доказать.

Пример 6. Если $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$, то $\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta)$. Доказать.

Р е ш е н и е. Допустимые значения для аргументов $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $\beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Так как искомое соотношение содержит функцию синус, то в данном соотношении переходим к синусам и косинусам:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\beta}{\cos\beta},\quad 2\cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta.$$

Если теперь произведения функций заменить суммами, то тем самым мы введем нужные углы $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$

откуда $\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta)$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Дано: $\sin(2\alpha+\beta) = 2\sin\beta$; $\cos\alpha \neq 0$; $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$. Найти зависимость между $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

Р е ш е н и е. Так как в задаче требуется найти зависимость между тангенсами углов $\alpha+\beta$ и α, то выделим эти углы в данном соотношении. С этой целью преобразуем заданное соотношение так:

$$\sin[(\alpha+\beta)+\alpha] = 2\sin[(\alpha+\beta)-\alpha],$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

или

$$3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha;$$

разделив обе части этого равенства на $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$, получим: $3\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; это и есть искомая зависимость

Пример 8. Зная, что $\sin\alpha = A\sin\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta$, доказать, что одно из значений $\cos\alpha$ есть $\sqrt{\dfrac{A^2-1}{B^2-1}}$.

Р е ш е н и е. Разделив почленно данные равенства, найдем:

$$\cos\alpha = \frac{A}{B}\cos\beta.$$

Следовательно, $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{A}$; $\cos\beta = \dfrac{B\cos\alpha}{A}$.

Далее находим:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \frac{\sin^2\alpha}{A^2} + \frac{B^2\cos^2\alpha}{A^2},$$

или

$$A^2 = 1 - \cos^2\alpha + B^2\cos^2\alpha,$$

откуда

$$A^2 - 1 = (B^2 - 1)\cos^2\alpha; \quad \cos^2\alpha = \frac{A^2-1}{B^2-1};$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}},$$

и одним из значений $\cos\alpha$ есть $\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}$, что и требовалось доказать

Пример 9. Если $\operatorname{tg} x = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, то одним из значений $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ является $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Доказать.

Р е ш е н и е. Зная $\operatorname{tg} x$, можно вычислить $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, потом найти $\cos x$ и, наконец, вычислить $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Однако проще поступить следующим образом. Так как $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1-y^2}$, то заданное соотношение можно переписать так: $\frac{2y}{1-y^2} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$;

$$2(\cos\alpha + \cos\beta)\, y = \sin\alpha\sin\beta - y^2\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin\alpha\sin\beta\, y^2 + 2(\cos\alpha + \cos\beta)\, y - \sin\alpha\sin\beta = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \pm \frac{\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + \sin^2\alpha\sin^2\beta}}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{-(\cos\alpha+\cos\beta) \pm \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta+1}}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{-(\cos\alpha+\cos\beta) \pm (\cos\alpha\cos\beta+1)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Одним из значений y будет:

$$y = \frac{-\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta+1}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{1-\cos\alpha-\cos\beta(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

Очевидно, что данное условное равенство невозможно, если α или β будут принимать значения вида $(2k+1)\pi$, или же будут удовлетворять уравнению: $\cos\alpha+\cos\beta=0$.

III. Чтобы установить зависимость между аргументами по данным соотношениям между функциями этих аргументов, чаще всего заданное соотношение преобразуют так, чтобы левая часть представляла собой произведение тригонометрических функций, а правая — нуль; приравнивая каждый сомножитель нулю, получают искомые соотношения между аргументами.

Пример 10. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\gamma$. Найти зависимость между α, β и γ.

Р е ш е н и е. Допустимые значения аргументов: $\alpha+\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Преобразуем данное соотношение: $\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$; $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=0$, или $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=0$, откуда $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Пример 11. Дано: $\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$. Найти зависимость между аргументами A и B.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное равенство так: $\sin(A-B)-\sin^2 A+\sin^2 B=0$; $\sin(A-B)-\frac{1-\cos 2A}{2}+$

$+\frac{1-\cos 2B}{2}=0$; $\sin(A-B)+\frac{\cos 2A-\cos 2B}{2}=0$;

$\sin(A-B)+\sin(A+B)\sin(B-A)=0$, или $\sin(A-B)[1-\sin(A+B)]=0$.

Если $\sin(A-B)=0$, то $A-B=k\pi$; если же $1-\sin(A+B)=0$, т. е. $\sin(A+B)=1$, то $A+B=\frac{\pi}{2}(4k+1)$.

Пример 12. При каких значениях α и β справедливы равенства: а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$, б) $\sin\alpha=|\sin\alpha|$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуем заданное равенство:

$$\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=0.$$

Если $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, то $\frac{\alpha+\beta}{2}=k\pi$ и $\alpha+\beta=2k\pi$; если $\sin\frac{\alpha}{2}=0$, то $\alpha=2k\pi$; если, наконец, $\sin\frac{\beta}{2}=0$, то $\beta=2k\pi$.

б) Так как $|\sin\alpha|\geqslant 0$, то данное равенство может иметь место только при $\sin\alpha\geqslant 0$. Наоборот, если $\sin\alpha\geqslant 0$, то $|\sin\alpha|=\sin\alpha$.

Таким образом, условием необходимым и достаточным для существования данного равенства является:

$$\sin\alpha\geqslant 0, \text{ откуда } 2\pi k\leqslant\alpha\leqslant 2\pi k+\pi.$$

Пример 13. Установить соотношения между острыми углами α, β и γ, при которых имеет место соотношение: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Надо разложить на множители выражение:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Наиболее сложным является выражение $2\sin\alpha\sin\beta\times$ $\times\cos\gamma$, преобразуем его. Так как в данном выражении имеются квадраты синусов, то целесообразно рассматривать $2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$ как удвоенное произведение некоторых выражений и воспользоваться им для выделения полного квадрата; сделаем это:

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\gamma =$$
$$= (\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma)^2 - \sin^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\gamma.$$

Сумма последних трех слагаемых легко преобразуется к одночленному виду: $-\sin^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\gamma =$ $= \sin^2\beta(-\cos^2\gamma + 1) - \sin^2\gamma = \sin^2\beta\sin^2\gamma - \sin^2\gamma =$ $= \sin^2\gamma(\sin^2\beta - 1) = -\sin^2\gamma\cos^2\beta,$

следовательно,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = (\sin\alpha -$$
$$-\sin\beta\cos\gamma)^2 - \sin^2\gamma\cos^2\beta = (\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta)\times$$
$$\times(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) = [\sin\alpha - \sin(\beta - \gamma)]\times$$
$$\times[\sin\alpha - \sin(\beta + \gamma)] =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Заданное в условии соотношение можно переписать так:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0.$$

Если $\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} = 0$, то $\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} = k\pi$ и $\alpha + \gamma - \beta = 2k\pi$.

Но из условия задачи следует, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \gamma - \beta < \pi$, поэтому предыдущее равенство возможно только при $k = 0$, т. е. $\alpha + \gamma - \beta = 0$.

Аналогично из условия $\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} = 0$ получаем: $\beta + \gamma - \alpha = 0$.

Если $\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 0$, то $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $\alpha + \beta - \gamma = (2k+1)\pi$; это равенство невозможно ни при каком целом k, так как согласно условию задачи $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \gamma < \pi$.

Наконец, если $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0$, то $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=$ $=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ и $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi$. Из условия задачи следует, что $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$, поэтому последнее равенство возможно лишь при $k=0$ и тогда $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Итак, заданные в условии задачи соотношения могут иметь место в трех случаях: $\alpha+\gamma=\beta$; $\gamma+\beta=\alpha$; $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Второй способ. Мы уже указывали, что понижение степени синусов и косинусов значительно упрощает решение некоторых задач; такие преобразования особенно полезны тогда, когда имеется сумма квадратов функций.

Так как углы α, β и γ независимы (зависимость между ними надо найти), то нецелесообразно понижать степень всех трех квадратов синусов, достаточно понизить степень двух из них:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Теперь преобразуем произведение в сумму, чтобы получить тригонометрические функции уже имеющихся у нас углов $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$; получаем: $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$ $+\cos^2\gamma-[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\cos\gamma$; после этого разложение на множители ведем методом группировки:

$$-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos^2\gamma+$$
$$+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma=-\cos(\alpha-\beta)[\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma]+$$
$$+\cos\gamma[\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)]=[\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)][\cos\gamma-$$
$$-\cos(\alpha-\beta)]=$$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}.$$

Дальнейшее рассуждение аналогично.

Третий способ. Данное в условии задачи соотношение

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=0$$

можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$, тогда получим:

$$\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma\pm\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta+\sin^2\gamma}=\sin\beta\cos\gamma\pm$$

$$\pm\sqrt{\sin^2\beta(\cos^2\gamma-1)+\sin^2\gamma}=\sin\beta\cos\gamma\pm$$

$$\pm\sqrt{-\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\gamma}=\sin\beta\cos\gamma\pm$$

$$\pm\sqrt{\sin^2\gamma(-\sin^2\beta+1)}=\sin\beta\cos\gamma\pm\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\beta}=$$

$$=\sin\beta\cos\gamma\pm\sin\gamma\cos\beta.$$

Итак, мы получили два соотношения:

1) $\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$; преобразуем его:

$$\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma),\ \sin\alpha-\sin(\beta+\gamma)=0,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}=0.$$

2) $\sin\alpha=\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma$, преобразуя его, получим:

$$\sin\alpha=\sin(\beta-\gamma),\ \sin\alpha-\sin(\beta-\gamma)=0,$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}=0.$$

Дальнейшее решение очевидно.

Пример 14. При каком соотношении между углами α, β и γ будет иметь место равенство:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное соотношение так:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right);$$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$, откуда $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi k$, или $\alpha+\beta+\gamma=\pi(2k+1)$. Это и есть искомое соотношение.

При делении на $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ мы, естественно, считаем, что $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\neq 0$. Но это условие не является дополнительным. Действительно, если бы $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, то из данного равенства следовало бы: $-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=1$, что невозможно для действительных значений γ.

Можно было бы также воспользоваться формулой

$$\operatorname{ctg}(x+y+z)=\frac{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}.$$

Положив $x=\frac{\alpha}{2}$; $y=\frac{\beta}{2}$; $z=\frac{\gamma}{2}$, получим:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Из заданного соотношения следует, что

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

и поэтому

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

откуда

$$\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi.$$

Наконец, можно было бы заданное равенство преобразовать так:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}-1=0;$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=0;$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=0;$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=0, \text{ откуда } \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

и $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $\alpha+\beta+\gamma=\pi(2k+1)$.

Условия $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$; $\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$; $\cos\frac{\gamma}{2}\neq 0$, т. е. что α, β и γ не есть углы вида $(2k+1)\pi$ и тут не являются дополнительными (при этих значениях аргументов $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ перестают существовать).

В задачнике Стратилатова условие этой задачи (№ 343_{11}) дополнено тем, что $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ считаются острыми углами, в этом случае искомым будет соотношение: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

В следующей задаче мы сохранили формулировку задачника (№ 343_{12}).

Пример 15. Доказать, что если имеет место соотношение

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=1,$$

где α, β, γ — острые углы, то $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Р е ш е н и е. Умножив обе части данного соотношения на $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\neq 0$, получим:

$$\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma;$$
$$\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1);$$

$\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{tg}\alpha$, или $\operatorname{tg}(\gamma+\beta)=\operatorname{tg}(-\alpha)$, следовательно, $\gamma+\beta+\alpha=k\pi$, и так как $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$, то $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

VI. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Задачи, связанные с рассмотрением различных соотношений между элементами треугольника, дают возможность повторить и углубить знания по тригонометрии и способствуют математическому развитию учащихся.

Если требуется установить какую-либо зависимость только между тригонометрическими функциями углов треугольника, то обычно сначала исключают один из углов, а после выполнения преобразований его снова вводят.

Пример 1. Доказать, что если α, β и γ — углы треугольника, то

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$$

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Так как в правой части тождества угол α содержится только в одном члене, то в данном случае удобно исключить именно этот угол при помощи замены: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, тогда получим:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos[180° - (\beta + \gamma)] =$$
$$= \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta + \gamma).$$

Мы уже отмечали, что в такого рода выражениях не следует торопиться с понижением степени, лучше сначала преобразовать произведения функций в сумму, так как это может привести к уничтожению одного из квадратов; последнее обстоятельство подсказывает, что следует преобразовать $2\sin\beta\cos(\beta + \gamma)$ или $2\sin\gamma\cos(\beta + \gamma)$ (но не $2\sin\beta\sin\gamma$). Преобразуем $2\sin\gamma\cos(\beta + \gamma)$, получим:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta + \gamma) = \sin^2\beta + \sin^2\gamma +$$
$$+ \sin\beta[\sin(\beta + 2\gamma) - \sin\beta] = \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin\beta\sin(\beta +$$
$$+ 2\gamma) - \sin^2\beta = \sin^2\gamma + \sin\beta\sin(\beta + 2\gamma) = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} +$$
$$+ \frac{\cos 2\gamma - \cos(2\beta + 2\gamma)}{2} = \frac{1 - \cos(2\beta + 2\gamma)}{2} = \sin^2(\beta + \gamma) =$$
$$= \sin^2(180° - \alpha) = \sin^2\alpha.$$

Второй способ. По известной лемме имеем: $a = 2R\sin\alpha$; $b = 2R\sin\beta$; $c = 2R\sin\gamma$. Подставляя эти значения в формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (теорема косинусов), получаем; $4R^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\beta + 4R^2\sin^2\gamma - 8R^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$, откуда $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$, что и требовалось доказать.

Второй способ доказательства существенно опирается на то, что α, β и γ — углы треугольника, между тем как в первом способе доказательства используется только то, что $\alpha+\beta+\gamma=180°$ (последнее равенство может иметь место и не для углов треугольника, например, при $\alpha=\beta=90°$; $\gamma=0°$).

Пример 2. Если $\alpha+\beta+\gamma=180°$, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Доказать.

Р е ш е н и е. Обе части тождества теряют смысл, если углы α, β или γ будут вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, в частности, для прямоугольного треугольника.

Первый способ. В книге «Методика преподавания математики» под редакцией С. Е. Ляпина (часть 2-я, Учпедгиз, 1957, стр. 266) дается такое доказательство этого тождества:

$$\text{«}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}[180°-(\alpha+\beta)]=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(180°-\gamma)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)[\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos[180°-(\alpha+\beta)]}{\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha}+$$

$$+\frac{\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\gamma[-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta]}{\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\gamma(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha}{\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha\text{».}$$

Как мы увидим ниже, переход к синусам и косинусам при решении этого примера не дает более рационального решения, к тому же в приведенном выше решении преобразования выполнены неудачно, что значительно усложнило решение. В этом легко убедиться, сравнивая это решение хотя бы с таким:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}[180°-(\alpha+\beta)]=$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)[\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta]}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= -\operatorname{tg}(180°-\gamma)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Второй способ. Если обе части тождества содержат только функции тангенс и котангенс, то очень часто лучше не переходить к синусам и косинусам. Действительно,

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-$$

$$-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(-1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1) =$$

$$= -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

В этой задаче, как и во многих других, с большой пользой можно воспользоваться соотношением $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$ (оно вытекает из формулы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\Big).$$

В нашей задаче $\alpha+\beta = 180°-\gamma$, поэтому $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}\gamma$ и мы получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma =$$
$$= \operatorname{tg}\gamma(-1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1) = \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Третий способ. Можно исходить не из требуемого тождества, а из данного. По условию $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, следовательно, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(180°-\gamma)$, или $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, откуда $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, что и требовалось доказать.

Этот способ интересен тем, что показывает, как можно получать новые тождества, исходя из данного.

Пример 3. Доказать, что треугольник будет тупоугольным тогда, и только тогда, когда $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B < 1$.

Р е ш е н и е. Докажем необходимость этого условия. Пусть треугольник ABC — тупоугольный. Если тупым углом является один из углов A или B, тогда другой из них острый. Но тангенс острого угла положителен, а тупого —

отрицателен; поэтому в обоих случаях произведение тангенсов будет отрицательным, т. е. $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 0$. Тем более верно данное неравенство. Пусть теперь угол C будет тупым и нужно доказать, что $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 0$. Выражение $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$ можно найти из формулы $\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$, получим:

$$1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg}(A + B)} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg}(180° - C)} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{-\operatorname{tg} C}.$$

По условию $\operatorname{tg} C < 0$, $\operatorname{tg} A > 0$ и $\operatorname{tg} B > 0$, следовательно, $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{-\operatorname{tg} C} > 0$, т. е. $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 0$, что и требовалось доказать.

Докажем достаточность данного условия. Согласно условию $1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 0$, следовательно, $\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} < 0$. Относительно числителя можно сделать два допущения: 1) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B > 0$, тогда $\operatorname{tg} C < 0$ и угол C — тупой; 2) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B < 0$, тогда или $\operatorname{tg} A < 0$ и угол A — тупой, или же $\operatorname{tg} B < 0$ и тогда угол B — тупой. Во всех трех случаях данный треугольник тупоугольный. Если $C = 90°$, то $B = 90° - A$ и тогда $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A \operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} A = 1$.

Пример 4. Доказать, что если тангенсы половинных углов треугольника образуют арифметическую прогрессию, то косинусы целых углов также образуют арифметическую прогрессию.

Р е ш е н и е. Из условия задачи следует: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$; надо доказать, что $\cos\alpha + \cos\gamma = 2\cos\beta$. Таким образом, от соотношения, связывающего тангенсы, надо перейти к соотношению, связывающему косинусы. Вполне естественно, сначала надо преобразовать данное соотношение к синусам и косинусам, а именно:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

или

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

В искомое соотношение косинусы входят слагаемыми, поэтому в полученном равенстве произведения функций целесообразно преобразовать в суммы или разности. Получим:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}=2\left(\sin\frac{\beta+\alpha}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}=\sin\frac{\beta+\alpha+\gamma}{2}+\sin\frac{\beta+\alpha-\gamma}{2}+$$

$$+\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}.$$

Так как по условию $\alpha+\beta+\gamma=180°$, то $\alpha+\beta=180°-\gamma$, $\alpha+\gamma=180°-\beta$, $\gamma+\beta=180°-\alpha$. Используя эти равенства, найдем:

$$\sin\frac{180°-2\beta}{2}=\sin\frac{180°-2\gamma}{2}+\sin\frac{180°-2\alpha}{2}-\sin\frac{180°-2\beta}{2},$$

или

$$\sin(90°-\beta)+\sin(90°-\beta)=\sin(90°-\gamma)+\sin(90°-\alpha),$$

откуда $2\cos\beta=\cos\alpha+\cos\gamma$, что и требовалось доказать.

Если в требуемое соотношение, кроме углов, входят и другие элементы треугольника (стороны, радиусы, площадь и т. д), то во многих задачах оказывается удобным использовать лемму, которая дает возможность выразить все три стороны треугольника через один и тот же линейный элемент — радиус описанного круга, и тем самым привести задачу к тождественному преобразованию выражения, содержащего только тригонометрические функции углов треугольника.

Пример 5. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение:

$$(a+b)\cos\gamma+(b+c)\cos\alpha+(c+a)\cos\beta=2p.$$

Р е ш е н и е. По лемме имеем: $a=2R\sin\alpha$; $b=2R\sin\beta$; $c=2R\sin\gamma$, поэтому

$$(a+b)\cos\gamma+(b+c)\cos\alpha+(c+a)\cos\beta=(2R\sin\alpha+$$
$$+2R\sin\beta)\cos\gamma+(2R\sin\beta+2R\sin\gamma)\cos\alpha+(2R\sin\gamma+$$

$$+ 2R\sin\alpha)\cos\beta = 2R(\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta) +$$
$$+ 2R(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha) + 2R(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta) =$$
$$= 2R\sin(\beta+\gamma) + 2R\sin(\alpha+\gamma) + 2R\sin(\alpha+\beta) =$$
$$= 2R\sin(180^\circ - \alpha) + 2R\sin(180^\circ - \beta) + 2R\sin(180^\circ - \gamma) =$$
$$= 2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma = a + b + c = 2p.$$

Пример 6. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a\sin B}{c - a\cos\beta}.$$

Решение. Прежде всего заметим, что если угол A прямой, то левая часть тождества теряет смысл. Преобразуем правую часть равенства:

$$\frac{a\sin B}{c - a\cos\beta} = \frac{2R\sin A\sin B}{2R\sin C - 2R\sin A\cos B} = \frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B) - \sin A\cos B} =$$
$$= \frac{\sin A\sin B}{\sin A\cos B + \cos A\sin B - \sin A\cos B} = \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A.$$

Пример 7. Около треугольника с углами A и B описан круг. Найти отношение площади треугольника к площади круга.

Решение. Площадь треугольника

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot\sin[180^\circ - (A + B)] = 2R^2\sin A\sin B\sin(A+B),$$

следовательно,

$$\frac{S_\triangle}{S_k} = \frac{2R^2\sin A\sin B\sin(A+B)}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}\sin A\sin B\sin(A+B).$$

Пример 8. Решить косоугольный треугольник по заданным элементам:

$$A;\ B;\ a + b = m.$$

Решение. Из равенства $a + b = m$ находим: $2R\sin A + 2R\sin B = m$, откуда $2R = \frac{m}{\sin A + \sin B}$, следовательно, $a = 2R\sin A = \frac{m\sin A}{\sin A + \sin B}$; $c = 2R\sin C = \frac{m\sin(A+B)}{\sin A + \sin B}$ и т. д.

Пример 9. Решить косоугольный треугольник по заданным элементам:

$$a;\ b \text{ и } A = 2B.$$

Решение. Умножая обе части равенства $\sin A = \sin 2B$ на $2R$, находим:

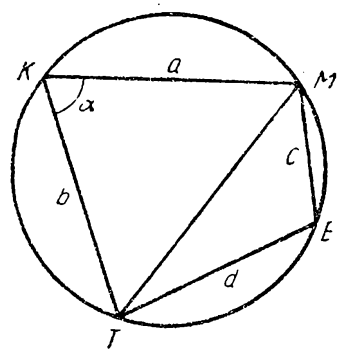
$2R \sin A = 4R \sin B \cos B$, или $a = 2b \cos B$, откуда

$$\cos B = \frac{a}{2b} \text{ и т. д.}$$

Пример 10. Доказать, что площадь вписанного в круг четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, a, b, c и d — стороны четырехугольника, α — угол между сторонами a и b (черт. 12).



Черт. 12.

Решение. Так как четырехугольник $KMET$ — вписанный, то $\angle MET = 180° - \angle MKT = 180° - \alpha$.

Площади треугольников KMT и MET соответственно равны $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ и $\frac{1}{2}cd\sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}cd\sin\alpha$, а площадь четырехугольника $S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha$. Чтобы получить вторую формулу для площади, надо вычислить $\sin\alpha$.

По теореме косинусов находим:

$$MT^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \alpha),$$
$$MT^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

следовательно,

$$c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Вычислим $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{[c^2+d^2+2cd-(a^2-2ab+b^2)][a^2+b^2+2ab-(c^2-2cd+d^2)]}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{[(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}.$$

Обозначая: $a+b+c+d=2p$, находим:

$$c+d-a+b = a+b+c+d-2a = 2p-2a = 2(p-a);$$
$$c+d+a-b = a+b+c+d-2b = 2p-2b = 2(p-b);$$
$$a+b-c+d = a+b+c+d-2c = 2p-2c = 2(p-c);$$
$$a+b+c-d = a+b+c+d-2d = 2p-2d = 2(p-d).$$

Таким образом, $\sin^2\alpha = \frac{2(p-a)\,2(p-b)\,2(p-c)\,2(p-d)}{4(ab+cd)^2}$;

$$\sin\alpha = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Подставляем значение $\sin\alpha$ в формулу площади четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} =$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Пример 11. Доказать, что в треугольнике имеет место соотношение:

$$a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha = 4S.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$a^2\sin 2\beta + b^2\sin 2\alpha =$$
$$= 4R^2\sin^2\alpha\, 2\sin\beta\cos\beta + 4R^2\sin^2\beta\, 2\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2R\sin\alpha\, 2R\sin\beta\, 2(\sin\alpha\cos\beta +$$

$$+ \sin\beta\cos\alpha) = ab \cdot 2\sin(\alpha+\beta) = 2ab\sin(180^\circ - \gamma) =$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2} ab \sin\gamma = 4S.$$

Пример 12. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место соотношение:

$$bc\cos\alpha - ac\cos\beta = b^2 - a^2.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$bc\cos\alpha - ac\cos\beta = 4R^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - 4R^2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta =$$
$$= 4R^2\sin\gamma(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) =$$
$$= 4R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha) = 2R^2(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) =$$
$$= 2R^2(1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta) = 4R^2\sin^2\beta - 4R^2\sin^2\alpha =$$
$$= b^2 - a^2.$$

Требуемое тождество можно получить и из теоремы косинусов, так как выражения $bc\cos\alpha$ и $ac\cos\beta$ характерны для этой теоремы. Действительно, из равенств $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ и $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ находим: $bc\cos\alpha = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$; $ac\cos\beta = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$, следовательно, $bc\cos\alpha - ac\cos\beta = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2 - a^2 - c^2 + b^2) = b^2 - a^2$, что и требовалось доказать.

Пример 13. Доказать, что если стороны a, b и c треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию, то

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 3.$$

Р е ш е н и е. По условию $a + c = 2b$, следовательно, $2R\sin A + 2R\sin C = 4R\sin B$, или $\sin A + \sin C = 2\sin B$. Так как в искомом соотношении угол B не содержится, то исключаем его на основании равенства $B = 180^\circ - (A + C)$:

$$\sin A + \sin C = 2\sin[180^\circ - (A + C)], \text{ или}$$
$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 4\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}, \text{ и так как}$$
$$\sin\frac{A+C}{2} \neq 0, \text{ то } \cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}.$$

Теперь мы имеем возможность ввести углы $\left(\frac{A}{2}\text{ и }\frac{C}{2}\right)$, входящие в нужное нам соотношение; сделаем это:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2},$$

или $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$.

Разделив обе части последнего равенства на

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\neq 0,\ \text{находим:}\ \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3.$$

Особенно интересны задачи, в которых требуется установить вид треугольника по определенному соотношению между его элементами. Основным методом решения таких задач является преобразование данного выражения так, чтобы в одной части был нуль, а в другой части — произведение тригонометрических функций.

Пример 14. Углы треугольника связаны соотношением: $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\gamma$. Доказать, что треугольник равнобедренный.

Решение: Имеем: $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)$, или $\sin\alpha=\sin\alpha+\sin(\beta-\gamma)$, откуда $\sin(\beta-\gamma)=0$.

Так как β и γ — углы треугольника, то $\beta=\gamma$ и, следовательно, $b=c$.

Пример 15. Доказать, что треугольник прямоугольный, если $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\cos^2\gamma=1;\quad \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$

$$+\cos^2(\alpha+\beta)=0;\ \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=0;$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta=0.$$

Если $\cos\alpha=0$, то $\alpha=90°$;
если $\cos\beta=0$, то $\beta=90°$;
если $\cos(\alpha+\beta)=0$, то $\alpha+\beta=90°$ и $\gamma=180°-90°=90°$.

Во всех трех случаях треугольник прямоугольный.

Пример 16. Если $\frac{\cos\alpha+\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, то треугольник — равнобедренный или прямоугольный. Доказать.

Решение. Имеем: $\cos\alpha\sin\gamma+\cos\gamma\sin\gamma=\sin\beta\cos\alpha+$

$$+\cos\beta\sin\beta;\ \cos\alpha\sin\gamma-\sin\beta\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\gamma-\frac{1}{2}\sin 2\beta=0;$$

$$\cos\alpha\,(\sin\gamma-\sin\beta)+\sin(\gamma-\beta)\cos(\gamma+\beta)=0;$$

$$\cos\alpha\cdot 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}(-\cos\alpha)=0;$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=0;$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)=0.$$

Если $\cos\alpha=0$, то $\alpha=90°$ и треугольник — прямоугольный; если $\sin\frac{\gamma-\beta}{2}=0$, то $\gamma=\beta$ и треугольник — равнобедренный. Равенства $\sin\frac{\gamma}{2}=0$ и $\sin\frac{\beta}{2}=0$ невозможны для углов треугольника.

Пример 17. Если в треугольнике $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$ и $\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}$, то такой треугольник — равносторонний. Доказать.

Р е ш е н и е. Преобразуем первое из заданных соотношений так:

$$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)\,c^2;$$
$$a^3+b^3-c^3=(a+b)\,c^2-c^3;$$
$$(a+b)\,(a^2-ab+b^2)=(a+b)\,c^2.$$

Так как a и b — стороны треугольника, то $a+b\neq 0$ и поэтому:

$$a^2-ab+b^2=c^2.$$

По теореме косинусов имеем:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

следовательно,

$$a^2-ab+b^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

откуда $\cos\gamma=\frac{1}{2}$ и $\gamma=60°$.

Рассмотрим теперь второе из заданных соотношений:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}.$$

Преобразуем его так: $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}=\frac{3}{4}$;

так как $\alpha+\beta=180^\circ-\gamma=120^\circ$, то $\cos(\alpha-\beta)-\cos 120^\circ=\frac{3}{2}$ и $\cos(\alpha-\beta)=1$.

Последнее равенство может иметь место для углов треугольника только тогда, когда $\alpha-\beta=0$, т. е. $\alpha=\beta$.

Итак, имеем: $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ и, следовательно, $a=b=c$; что и требовалось доказать.

В заключение главы мы хотим обратить внимание на одно неравенство, связывающее элементы треугольника, которое, интересное само по себе, с большой пользой может быть применено при доказательстве других неравенств. Речь идет о неравенствах:

$$\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}};\quad \sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}};\quad \sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Докажем, например, первое из этих неравенств. Для доказательства удобно воспользоваться теоремой косинусов, ибо она содержит только один угол треугольника. Имеем: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, откуда

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\quad\text{и}\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{4bc}}=$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Равенство имеет место при $b=c$ и тогда получаем $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2b}$, что очевидно для равнобедренного треугольника. Аналогично доказываются и остальные неравенства. Рассмотрим несколько примеров на применение этих неравенств.

Пример 18. Доказать, что в треугольнике имеет место неравенство:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Р е ш е н и е. Перемножив почленно неравенства:

$$\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}};\ \sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{b}{2\sqrt{ac}};\ \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{c}{2\sqrt{ab}},$$

получим:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{abc}{8abc},\ \text{или}\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Пример 19. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности не превосходит $\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. В книге «Задачи по математике и физике, дававшиеся на приемных испытаниях в 1957 году», изданной Московским физико-техническим институтом (Москва, 1959 г.), помещены геометрические решения этой задачи (стр. 47—51). Эти решения интересны, но довольно искусственны, а первое из них занимает более трех страниц и содержит 4 чертежа.

Между тем по известным формулам: $R = \frac{a}{2\sin A}$; $r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ находим:

$$\frac{r}{R} = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}2\sin A}{a\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} =$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

и на основании предыдущего примера получаем: $\frac{r}{R} \leqslant 4\cdot\frac{1}{8}$, т. е. $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$.

Равенство имеет место в правильном треугольнике.

Пример 20. Доказать, что в треугольнике имеет место неравенство:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1 = 1 + 2\cos\frac{A+B}{2} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Но $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$ (см. пример 18), получим:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Пример 21. Доказать, что в треугольнике имеет место неравенство:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Р е ш е н и е. Имеем: $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1-\cos A}{2} +$

$$+ \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Но $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$ (см. пример 20). Окончательно будем иметь:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Пример 22. Доказать, что в треугольнике имеет место неравенство:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{a^2}{4S}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^2}{4bc} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\frac{bc\sin\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4S}.$$

VII. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ.

В этом разделе рассматриваются задачи и примеры, которые мы обычно решаем при повторении материала нескольких разделов тригонометрии или в конце учебного года в IX и X классах.

Задачи на суммирование имеют большое значение для математического развития учащихся и поэтому не удивительно, что подобные задачи имеются почти во всех задачниках по тригонометрии.

Основным и наиболее употребительным в тригонометрии способом суммирования является представление общего члена суммы разностью определенных функций.

Пример 1. Найти сумму:

$$S = \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{tg}4\alpha + \ldots + 2^n \operatorname{tg}2^n\alpha.$$

Р е ш е н и е. Попытаемся каждый член этой суммы представить в виде разности. Так как аргумент в каждом члене суммы является двойным по отношению к аргументу в предыдущем члене суммы, то естественно воспользоваться формулой: $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Относительно $\operatorname{tg}\alpha$ это уравнение является квадратным и дает для $\operatorname{tg}\alpha$ сложное выражение; если числитель и знаменатель дроби разделить на $\operatorname{tg}\alpha$, то относительно $\operatorname{tg}\alpha$ мы получим линейное уравнение: $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$, откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}, \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha$$

$$\text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Это и есть искомое равенство. Заменив в этом соотношении произвольный аргумент α аргументом $2^k\alpha$, мы получим соотношение: $\operatorname{tg}2^k\alpha = \operatorname{ctg}2^k\alpha - 2\operatorname{ctg}2^{k+1}\alpha$, которое дает возможность каждый член данной суммы представить в виде разности. Выполняя в данной сумме соответствующие замены, получим:

$$S = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha + 2(\operatorname{ctg}2\alpha - 2\operatorname{ctg}4\alpha) + 4(\operatorname{ctg}4\alpha - \\ - 2\operatorname{ctg}8\alpha) + \ldots + 2^n(\operatorname{ctg}2^n\alpha - 2\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha - \\ - 2\operatorname{ctg}2\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha - 4\operatorname{ctg}4\alpha + 4\operatorname{ctg}4\alpha - 8\operatorname{ctg}8\alpha + \ldots + \\ + 2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.$$

Эта задача помещена в сборнике задач по тригонометрии Р. И. Позойского (раздел VIII, № 38), но в условии ее последний член ошибочно записан так: «$n\operatorname{tg} n\alpha$» (вместо $2^n \operatorname{tg} 2^n\alpha$); в этом задачнике дан и неправильный ответ к этой задаче: «$\operatorname{ctg}\alpha - 2^n \operatorname{ctg} 2^n\alpha$».

Не посчастливилось этой задаче и в сборнике задач по тригонометрии А. И. и Н. И. Худобиных (№ 1120); в условии задачи имеется опечатка в изображении последнего члена «$2^n \operatorname{ctg} 2^n\alpha$» (вместо $2^n \operatorname{tg} 2^n\alpha$) и ответ к этой задаче «$\operatorname{ctg}\alpha$» также не верен.

Иногда бывает, что члены суммы удается изобразить разностью только после того, как они будут умножены на определенное, одинаковое для всех членов суммы, число.

Пример 2. Найти сумму:

$$S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$$

Р е ш е н и е. Разности функций получаются при преобразовании выражений вида $\sin\alpha \sin\beta$ или $\sin\alpha \cos\beta$. Очевидно, что в данном случае можно получить произведения вида $\sin\alpha \cos\beta$, для чего достаточно умножить данную сумму на $\sin x$. Остается подобрать угол x так, чтобы получить значительные упрощения. Преобразуя $\sin x \cos\alpha$ в разность, мы получаем углы $x+\alpha$ и $x-\alpha$ и для упрощений необходимо, чтобы сумма углов в предыдущем члене была равна разности углов в последующем, т. е. чтобы:

$$x + k\alpha = (k+1)\alpha - x, \text{ откуда } 2x = \alpha, \text{ или } x = \frac{\alpha}{2}.$$

Исходя из этого, умножим обе части данного равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, тогда получим: $2S \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha +$

$$+ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha =$$

$$= \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{7\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2} + \ldots +$$

$$+ \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2} = -\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}, \text{ следовательно, } S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Точно так же для нахождения суммы $T = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$ можно воспользоваться тем, что произведение синусов преобразуется в разность косинусов. Умножая все члены данной суммы на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и заменяя $2\sin\frac{\alpha}{2}\sin k\alpha$ на $\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(2k+1)\alpha}{2}$, легко находим T.

Вообще, если аргументы функций образуют арифметическую прогрессию с разностью β, т. е. α; $\alpha+\beta$; $\alpha+2\beta$;...; $\alpha+k\beta$; $\alpha+(k+1)\beta$; ...; $\alpha+n\beta$, то умножением на функцию угла x можно добиться упрощения в том случае, когда $x+\alpha+k\beta = \alpha+(k+1)\beta - x$, т. е. при $x = \frac{\beta}{2}$.

Рассматривая тождество $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$, мы доказывали его свертыванием по формуле синуса двойного угла (см. стр. 41), но можно получить и более простое решение, если заметить, что углы $\frac{2\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{7}$ и $\frac{6\pi}{7}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{2\pi}{7}$, и применить изложенный выше способ; получим:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\pi}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

75

Тождество $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$ можно доказать тем же способом:

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{5\pi}{5}-\sin\frac{3\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(-\sin\frac{\pi}{5}+\sin\pi\right)=-\frac{1}{2}.$$

Если последовательность членов суммы знакопеременная, то каждый член представляют суммой слагаемых.

Пример 3. Найти сумму:

$$S=\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\ldots+(-1)^{n-1}\sin nx.$$

Р е ш е н и е. Так как аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью x, а выражение $\sin\alpha\cos\beta$ преобразуется в сумму, то, умножив обе части предыдущего равенства на $2\cos\frac{x}{2}$, получим:

$$2S\cos\frac{x}{2}=2\sin x\cos\frac{x}{2}-2\sin 2x\cos\frac{x}{2}+2\sin 3x\cos\frac{x}{2}-$$

$$-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 2\sin nx\cos\frac{x}{2};\quad 2S\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}-$$

$$-\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}+\sin\frac{5x}{2}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\sin\frac{2n+1}{2}x+(-1)^{n-1}\sin\frac{2n-1}{2}x,$$

или

$$2S\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+(-1)^{n-1}\sin\frac{2n+1}{2}x.$$

При n — четном, находим:

$$2S\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{2n+1}{2}x;\quad 2S\cos\frac{x}{2}=-2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x,$$

откуда

$$S=\frac{-\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}.$$

При n — нечетном, находим: $2S\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+$ $+\sin\frac{2n+1}{2}x$; $2S\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x$, откуда

$$S=\frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что в обоих случаях ответ можно заменить таким:

$$S=-\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left\{\sin\left[\frac{n+1}{2}x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{(n+1)(x+\pi)}{2}\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\right].$$

Последнее выражение можно получить сразу, если данную знакопеременную сумму заменить такой знакопостоянной:
$S=\sin x+\sin(2x+\pi)+\sin(3x+2\pi)+\sin(4x+3\pi)+\ldots+$ $+\sin[nx+(n-1)\pi]$, в которой аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью $x+\pi$.

Пример 4. Найти сумму: $S=\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+$ $+2\beta)+\sin^2(\alpha+3\beta)+\ldots+\sin^2(\alpha+n\beta)$.

Р е ш е н и е. Прежде всего понизим степень тригонометрических функций, получим:

$$S=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}+\frac{1-\cos(2\alpha+4\beta)}{2}+\frac{1-\cos(2\alpha+6\beta)}{2}+\ldots+$$

$$+\frac{1-\cos(2\alpha+2n\beta)}{2},$$

или

$$S=\frac{n}{2}-\frac{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha+4\beta)+\cos(2\alpha+6\beta)+\ldots+\cos(2\alpha+2n\beta)}{2}.$$

В числителе дроби мы имеем сумму косинусов углов, образующих арифметическую прогрессию с разностью 2β. Как и в предыдущем примере, умножим все члены этой суммы на синус угла, равного полуразности этой прогрессии, тогда получим:

$$S=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\beta}[2\sin\beta\cos(2\alpha+2\beta)+2\sin\beta\cos(2\alpha+4\beta)+$$

$$+\ldots+2\sin\beta\cos(2\alpha+2n\beta)]=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\beta}\{\sin(2\alpha+3\beta)-$$

$$-\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha+5\beta)-\sin(2\alpha+3\beta)+\sin(2\alpha+$$

$$+7\beta)-\sin(2\alpha+5\beta)+\ldots+\sin[2\alpha+(2n+1)\beta]-\sin[2\alpha+$$

$$+(2n-1)\beta]\}=\frac{n}{2}-\frac{1}{4\sin\beta}\{-\sin(2\alpha+\beta)+\sin[2\alpha+$$

$$+(2n+1)\beta]\}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin\beta}\{\sin n\beta\cos[2\alpha+(n+1)\beta]\}=$$

$$=\frac{n\sin\beta-\sin n\beta\cos[2\alpha+(n+1)\beta]}{2\sin\beta}.$$

При решении многих задач по тригонометрии представляется возможность для повторения и углубления понятия арифметического корня.

Приведем несколько примеров.

Пример 5. Упростить выражение: $A=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+$

$$+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \text{если}\ 0<\alpha<2\pi\ \text{и}\ \alpha\neq\pi.$$

Имеем:

$$A=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}+$$

$$+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}.$$

Выражения $1-\cos\alpha$ и $1+\cos\alpha$ не могут быть отрицательными и поэтому

$$\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}=1-\cos\alpha;\quad \sqrt{(1+\cos\alpha)^2}=1+\cos\alpha.$$

Если $0<\alpha<\pi$, то $\sin\alpha>0$ и тогда $\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$; если же $\pi<\alpha<2\pi$, то $\sin\alpha<0$ и тогда $\sqrt{\sin^2\alpha}=-\sin\alpha$.

Итак, при $0<\alpha<\pi$ имеем:

$$A=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

Если же $\pi<\alpha<2\pi$, то

$$A=\frac{1-\cos\alpha}{-\sin\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{2}{-\sin\alpha}=\frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

Таким образом, оба ответа можно объединить в один: $A=\frac{2}{|\sin\alpha|}$. Если сразу ввести обозначение абсолютной величины числа, то вычисления будут более простыми:

$$A=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}+$$
$$+\frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

Пример 6. Доказать тождества:

$$\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2},\ \text{если}\ 0^\circ\leqslant\alpha\leqslant 90^\circ;$$

$$\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2},\ \text{если}\ 90^\circ\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ.$$

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Преобразуем левую часть так:

$$A=\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{1+\cos(90^\circ-\alpha)}-$$
$$-\sqrt{1-\cos(90^\circ-\alpha)}=\sqrt{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}-$$
$$-\sqrt{2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Если $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, то $0° \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant 45°$ и $45° \geqslant 45° - \frac{\alpha}{2} \geqslant 0°$,

следовательно, $\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$; $\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$.

Поэтому полученное выражение будет равно:

$$A = \sqrt{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\sin 45° \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos 45° \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sin\left(45° - 45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Если же $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, то $45° \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant 90°$ и

$0° \geqslant 45° - \frac{\alpha}{2} \geqslant -45°$, следовательно, $\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$;

$\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant 0$; $\sqrt{\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)} = -\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$,

поэтому будем иметь:

$$A = \sqrt{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{2}\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\sin 45° \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos 45° \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sin\left(45° + 45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Второй способ. Преобразуем левую часть тождества так:

$$A = \sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} -$$

$$- \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Если $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, то $0° \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant 45°$ и тогда

$\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant \cos\frac{\alpha}{2}$, т. е. $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} = -\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

В этом случае

$$A = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Если же $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, то $45° \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant 90°$ и тогда

$\sin\frac{\alpha}{2} > \cos\frac{\alpha}{2}$, т. е. $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$.

В этом случае имеем:

$$A = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} -$$

$$- \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Пример 7. Преобразовать в произведение:

$$A = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}, \text{ если } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$A = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \sqrt{2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

По условию задачи $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Кроме того, $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$ и $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, так как $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому $\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = -\cos\frac{\alpha}{2}$; $\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}$.

Теперь находим:

$$A = -\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(-\sin 45^\circ\cos\frac{\alpha}{2} + \cos 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Необходимо заметить, что в учебной литературе для учителей все еще встречаются ошибки в примерах, содержащих арифметические корни (наряду со многими правильными примерами); в задачах по тригонометрии эти ошибки встречаются чаще: по-видимому, в тригонометрических преобразованиях они выступают не так отчетливо и труднее распознаются.

Распространенной ошибкой является то, что авторы в некоторых задачах рассматривают арифметические значения квадратных корней не для всех допустимых значений аргументов.

Подобные ошибки мы наблюдаем, например, в книге К. С. Барыбина и А. К. Исакова «Сборник задач по математике» (Пособие для учителей VIII — X классов, Учпедгиз, 1955 г.).

1) Пример № 1507 (16). Доказать:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2}} = 1.$$

Преобразуя левую часть, мы получим:

$$\frac{\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha}{\sqrt{1 - (\sin 60^\circ\sin\alpha + \cos 60^\circ\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2(60^\circ - \alpha)}} =$$

$$= \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sqrt{\sin^2(60^\circ - \alpha)}} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{|\sin(60^\circ - \alpha)|}.$$

Теперь ясно, что при $360^\circ k < 60^\circ - \alpha < 360^\circ k + 180^\circ$ мы будем иметь: $\sin(60^\circ - \alpha) > 0$ и тогда данное выражение равно 1; если же $360^\circ k + 180^\circ < 60^\circ - \alpha < 360^\circ k + 360^\circ$, то $\sin(60^\circ - \alpha) < 0$; $|\sin(60^\circ - \alpha)| = -\sin(60^\circ - \alpha)$ и полученное выражение равно -1.

2) Пример № 1596. «Решить уравнение: $\sin 2x - \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$». К этому примеру дан ответ в предположении, что $\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sin\frac{x}{2}$, и нет ответа для второго возможного случая:

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = -\sin\frac{x}{2}.$$

3) Пример № 1490 (1).«Доказать: $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}} = \sec\alpha;\ 0° < \alpha < 90°$».

Границы для угла α указаны неверно. Действительно, если $0° < \alpha < 45°$, то $0° < 2\alpha < 90°$; $\cos 2\alpha > 0$ и тогда $\sqrt{2+2\cos 4\alpha} = \sqrt{4\cos^2 2\alpha} = 2\cos 2\alpha$ и заданное тождество имеет место; если же $45° < \alpha < 90°$, то $90° < 2\alpha < 180°$, $\cos 2\alpha < 0$ и, следовательно, $\sqrt{4\cos^2 2\alpha} = -2\cos 2\alpha$, тогда левая часть данного равенства равна $\operatorname{cosec}\alpha$.

В учебнике тригонометрии С. И. Новоселова выводятся *формулы тройного аргумента* для синуса и косинуса:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Способом, примененным в учебнике, легко получить формулу и для $\operatorname{tg} 3\alpha$, но можно воспользоваться и полученными формулами:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{4 - 3\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha) - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{4 - 3(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Рассмотрим применение формул тройного аргумента в решении следующих двух задач.

Пример 8. Доказать, что $\operatorname{tg}^2 20°$, $\operatorname{tg}^2 40°$ и $\operatorname{tg}^2 80°$ являются корнями уравнения: $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Задача сводится к доказательству трех тождеств:

$$\operatorname{tg}^6 20^\circ - 33\operatorname{tg}^4 20^\circ + 27\operatorname{tg}^2 20^\circ - 3 = 0;$$
$$\operatorname{tg}^6 40^\circ - 33\operatorname{tg}^4 40^\circ + 27\operatorname{tg}^2 40^\circ - 3 = 0;$$
$$\operatorname{tg}^6 80^\circ - 33\operatorname{tg}^4 80^\circ + 27\operatorname{tg}^2 80^\circ - 3 = 0.$$

Однако непосредственную проверку этих тождеств осуществить нелегко, по-видимому, значительно легче получить их преобразованием очевидных тождеств. Докажем, например, второе тождество. Угол в 40° обладает тем свойством, что $3 \cdot 40^\circ = 120^\circ$, т. е. углу, тригонометрические функции которого известны, в частности

$$\operatorname{tg}(3 \cdot 40^\circ) = \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3},$$

по формуле тройного аргумента находим:

$$\frac{3\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg}^3 40^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 40^\circ} = -\sqrt{3};$$

возводим обе части равенства в квадрат:

$$\frac{9\operatorname{tg}^2 40^\circ - 6\operatorname{tg}^4 40^\circ + \operatorname{tg}^6 40^\circ}{1 - 6\operatorname{tg}^2 40^\circ + 9\operatorname{tg}^4 40^\circ} = 3,$$

или $\operatorname{tg}^6 40^\circ - 33\operatorname{tg}^4 40^\circ + 27\operatorname{tg}^2 40^\circ - 3 = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично для доказательства двух других тождеств, исходим из очевидных равенств: $\operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}(3 \cdot 80^\circ) = \sqrt{3}$.

Пример 9. Доказать, что $4\cos^2\frac{\pi}{7}$, $4\cos^2\frac{2\pi}{7}$ и $4\cos^2\frac{3\pi}{7}$ являются корнями уравнения: $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Необходимо доказать тождества:

$$64\cos^6\frac{\pi}{7} - 80\cos^4\frac{\pi}{7} + 24\cos^2\frac{\pi}{7} - 1 = 0;$$

$$64\cos^6\frac{2\pi}{7} - 80\cos^4\frac{2\pi}{7} + 24\cos^2\frac{2\pi}{7} - 1 = 0;$$

$$64\cos^6\frac{3\pi}{7} - 80\cos^4\frac{3\pi}{7} + 24\cos^2\frac{3\pi}{7} - 1 = 0.$$

Все три тождества легко получить из равенства: $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$, доказанного нами ранее (см. стр. 39).

Докажем, например, третье тождество. Для этого преобразуем указанное равенство так, чтобы оно содержало функции углов, кратных $\frac{3\pi}{7}$, а именно:

$$\cos\left(\pi-\frac{6\pi}{7}\right)\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(2\pi-\frac{9\pi}{7}\right)=\frac{1}{8},$$

или

$$\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{7}=\frac{1}{8}.$$

Применяя формулы косинуса двойного и тройного аргумента, получаем:

$$\left(2\cos^2\frac{3\pi}{7}-1\right)\cos\frac{3\pi}{7}\left(4\cos^3\frac{3\pi}{7}-3\cos\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{8};$$

$$\left(16\cos^3\frac{3\pi}{7}-8\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(4\cos^3\frac{3\pi}{7}-3\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1,$$

или

$$64\cos^6\frac{3\pi}{7}-80\cos^4\frac{3\pi}{7}+24\cos^2\frac{3\pi}{7}-1=0,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства двух других тождеств представляем взятое равенство в виде: $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{8}$, или $\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{8}$ и применяем формулы двойного и тройного аргумента. Заметим, что формулы тройного аргумента для всех тригонометрических функций можно преобразовать к одному виду, а именно:

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha);$$
$$\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha);$$
$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha);$$
$$\operatorname{ctg}3\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha).$$

Первую формулу мы доказали на стр. 60; тем же способом доказывается и вторая формула. Последние две формулы легко получаются делением обеих частей первых

двух равенств; но их легко получить и непосредственно; так, например,

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\,\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha).$$

Эти формулы служат источником многих распространенных тождеств:

$$\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8};\quad \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8};$$

$$\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\quad (\text{при } \alpha = 10^\circ);$$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8};\quad \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}\quad (\text{при } \alpha = 20^\circ).$$

Пример 10. Доказать тождество:

$$\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

Р е ш е н и е. Применяя формулу $\cos\alpha \cos(60^\circ - \alpha) \times \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$, получаем: $\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ =$

$$= \cos 5^\circ \cos(60^\circ - 5^\circ)\cos(60^\circ + 5^\circ) = \frac{1}{4}\cos(3\cdot 5^\circ) = \frac{1}{4}\cos 15^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

Пример 11. Доказать тождества:

а) $\operatorname{tg} 3^\circ \operatorname{tg} 17^\circ \operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 63^\circ \operatorname{tg} 77^\circ \operatorname{tg} 83^\circ = \operatorname{tg} 27^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 78^\circ = 1$.

Р е ш е н и е а) Группируя множители и применяя формулу $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$, получаем:

$$(\operatorname{tg} 3^\circ \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 63^\circ)(\operatorname{tg} 17^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 77^\circ)(\operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 83^\circ) =$$
$$= [\operatorname{tg} 3^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 3^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 3^\circ)][\operatorname{tg} 17^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 17^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 17^\circ)][\operatorname{tg} 23^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 23^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 23^\circ)] =$$
$$= \operatorname{tg}(3\cdot 3^\circ) \operatorname{tg}(3\cdot 17^\circ) \operatorname{tg}(3\cdot 23^\circ) = \operatorname{tg} 9^\circ \operatorname{tg} 51^\circ \operatorname{tg} 69^\circ =$$
$$= \operatorname{tg} 9^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 9^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 9^\circ) = \operatorname{tg}(3\cdot 9^\circ) = \operatorname{tg} 27^\circ;$$

б) $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 78^\circ = \operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 78^\circ =$

$$= \frac{\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg}(60^\circ + 6^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ - 6^\circ)}{\operatorname{tg}(60^\circ - 6^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(60^\circ - 18^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 18^\circ) \operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 18^\circ} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(3\cdot 6^\circ)}{\operatorname{tg} 54^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg}(3\cdot 18^\circ)}{\operatorname{tg} 18^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 18^\circ \operatorname{tg} 54^\circ}{\operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 18^\circ} = 1.$$

В § 26 учебника С. И. Новоселова выводятся *формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента.* Некоторые учителя ограничиваются применением этих формул только для рационализации уравнения: $a \sin x + b \cos x = c$ (о чем говорится в § 55 того же учебника), и тем самым значительно обедняют содержание этих формул.

Рассматриваемые формулы могут с большой пользой применяться и при решении многих других задач.

Пример 12. Доказать, что $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ не зависит от a, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$.

Р е ш е н и е. Применяя указанные формулы, находим:

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \frac{a \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{b\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2a^2}{b} + b\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}{1 + \frac{a^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\frac{a^2 + b^2}{b}}{\frac{a^2 + b^2}{b^2}} = b.$$

Пример 13. Доказать, что $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. Применяя рассматриваемые формулы, получаем:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}} = \frac{24}{25};$$

$$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = \frac{4\operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}^2\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\beta)^2} = \frac{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}}{\frac{100}{81}} = \frac{24}{25}.$$

Пример 14. Доказать, что выражение

$$\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

можно рационально выразить через $\operatorname{tg}2\alpha$.

Р е ш е н и е. Имеем: $\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha)\,(\cos\alpha-\sin\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)}$.

Пример 15. Решить уравнение: $\sin 2x + \operatorname{tg}x = 2$.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное уравнение так:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg}x = 2.$$

Так как $1+\operatorname{tg}^2 x \neq 0$, то получаем:

$$2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^3 x = 2 + 2\operatorname{tg}^2 x;\ \operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}x - 2 = 0;$$
$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x + 2\operatorname{tg}x - 2 = 0;$$
$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}x-1) - \operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-1) + 2(\operatorname{tg}x-1) = 0;$$
$$(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}x + 2) = 0.$$

Из уравнения $\operatorname{tg}x - 1 = 0$ находим: $\operatorname{tg}x = 1$ и $\pi k + \frac{\pi}{4}$, а уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}x + 2 = 0$ действительных решений не имеет.

Пример 16. Уравнение $a\cos x + b\sin x + c = 0$ имеет корни α_1 и α_2 $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$, заключенные между 0 и π. Найти $\sin(\alpha_1+\alpha_2)$.

Р е ш е н и е. Так как α_1 и α_2 — корни данного уравнения, то должны иметь место такие тождества:

$$a\cos\alpha_1 + b\sin\alpha_1 + c = 0;$$
$$a\cos\alpha_2 + b\sin\alpha_2 + c = 0.$$

Вычитая соответствующие части уравнений, находим:

$$a(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + b(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) = 0,$$

или

$$2a\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} - 2b\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = 0.$$

Согласно условию задачи $\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2} \neq 0$, поэтому

$$a\sin\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = b\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}, \text{ откуда } \operatorname{tg}\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} = \frac{b}{a}.$$

Далее имеем:

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} = \frac{\frac{2b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Заметим, что $\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \neq 0$, так как в противном случае на коэффициенты данного уравнения должны быть наложены особые ограничения.

Пример 17. Если $\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$, то $\cos 2\gamma \leqslant 0$. Доказать.

Р е ш е н и е. $\cos 2\gamma = \frac{1-\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}$, следовательно, надо доказать, что $\frac{1-\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{tg}^2\gamma} \leqslant 0$, или $1 - \operatorname{tg}^2\gamma \leqslant 0$ (так как $1+\operatorname{tg}^2\gamma > 0$), откуда $\operatorname{tg}^2\gamma - 1 \geqslant 0$.

Вычисляем левую часть последнего неравенства:

$$\operatorname{tg}^2\gamma - 1 = \left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\right)^2 - 1 = \left(\frac{1+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{(1+\sin\alpha\sin\beta)^2 - \cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{(1 + \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta)(1 + \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta)}{\cos^2\alpha \cos^2\beta} =$$

$$= \frac{[1+\cos(\alpha-\beta)][1-\cos(\alpha+\beta)]}{\cos^2\alpha \cos^2\beta} = \frac{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\alpha \cos^2\beta} \geqslant 0,$$

что очевидно.

Трудно переоценить значение метода математической индукции для развития математического кругозора учащихся. Вместе с тем усвоение этого метода составляет для учащихся значительные трудности, и ясного понимания его можно добиться только систематическим решением задач на применение этого метода. Несколько таких задач мы решаем и в процессе изучения тригонометрии.

Пример 18. Доказать методом математической индукции, что

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}.$$

Решение. 1) При $n = 1$ тождество справедливо:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

2) Допустим, что тождество справедливо при $n = k$, т. е.

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^k \sin\frac{x}{2^k}}.$$

Необходимо доказать, что данное тождество справедливо при $n = k + 1$, т. е.

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Действительно,

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\cdot 2\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}=\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Пример 19. Доказать методом математической индукции, что

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Р е ш е н и е. 1) При $n=1$ тождество справедливо,

так как $\sin\alpha=\dfrac{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2) Пусть тождество справедливо при $n=k$, т. е.

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Докажем, что при этом условии тождество справедливо и при $n=k+1$, т. е. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin k\alpha+$

$$+\sin(k+1)\alpha=\frac{\sin\frac{k+2}{2}\alpha\cdot\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Действительно,

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\sin(k+1)\alpha = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k\alpha}{2} + \sin(k+1)\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2k+1}{2}\alpha + \cos\frac{2k+1}{2}\alpha - \cos\frac{2k+3}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2k+3}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{k+2}{2}\alpha\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример 20. Доказать формулу Моавра: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ при любом натуральном n.

Решение. 1) При $n = 1$ тождество справедливо: $\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

2) Пусть данное соотношение справедливо при $n = k$, т. е.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha.$$

Докажем, что в таком случае оно справедливо и при $n = k + 1$, т. е.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = \cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha.$$

Действительно,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k(\cos\alpha + i\sin\alpha) =$$
$$= (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos k\alpha\cos\alpha -$$
$$- \sin k\alpha\sin\alpha + i(\sin k\alpha\cos\alpha + \cos k\alpha\sin\alpha) =$$
$$= \cos(k+1)\alpha + i\sin(k+1)\alpha.$$

В задачнике П. В. Стратилатова предлагается доказать методом математической индукции 8 тождеств Эйлера [задача № 597 (4а)]. Рассмотрим доказательство двух из них.

Пример 21. Доказать методом математической индукции справедливость равенств:

а) $\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha$.

Р е ш е н и е. а) При $n = 1$ тождество справедливо, так как

$$\sin\left(\frac{7}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Предположим теперь, что заданное равенство справедливо при $n = k$, т. е. $\sin\left(\frac{4k+3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$, и докажем, что в таком случае оно справедливо при $n = k + 1$, т. е. $\sin\left(\frac{4k+7}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$. Действительно,

$$\sin\left(\frac{4k+7}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{4k+3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(\frac{4k+3}{2}\pi+\alpha\right)=$$
$$=-\cos\alpha.$$

б) При $n= 1$ тождество справедливо, так как

$$\cos\left(\frac{4+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos(4\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$

Предположим теперь, что $\cos\left(\frac{4k+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha$, и докажем, что $\cos\left(\frac{4k+8}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\alpha$. Действительно,

$$\cos\left(\frac{4k+8}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left(2\pi+\frac{4k+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left(\frac{4k+4}{2}\pi+\alpha\right)=$$
$$=\cos\alpha.$$

К сожалению, ценность этих упражнений снижается тем, что рассматриваемые соотношения являются непосредственными следствиями формул приведения. В самом деле:

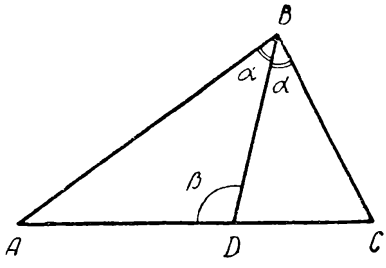
а) $\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$
$$=-\cos\alpha;$$

б) $\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+\alpha\right)=\cos[(n+1)2\pi+\alpha]=\cos\alpha.$

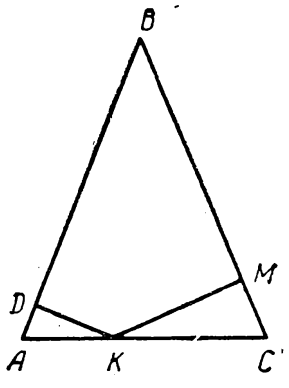
Научить учащихся применять а н а л и т и ч е с к и й метод тригонометрии при решении разнообразных задач — одна из важнейших целей преподавания тригонометрии в школе.

Суть этого метода состоит в том, что в задачу вводят углы, вследствие чего становится возможным применение тригонометрических функций с их свойствами. Особенно большую силу аналитический метод тригонометрии приобретает при решении геометрических задач. Сильное впечатление производят на учащихся такие задачи, условия которых как будто ничего «тригонометрического» в себе не содержат. Рассмотрим несколько таких задач.

Пример 22. Пользуясь теоремой синусов, доказать известную из геометрии теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.



Черт. 13.



Черт. 14.

Р е ш е н и е. Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle CBD$ (черт. 13), то $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. Обозначим: $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$; тогда $\angle CDB = 180° - \beta$. Из треугольников ABD и DBC по теореме синусов имеем:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ и } \frac{DC}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180° - \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, что и требовалось доказать.

Пример 23. Сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон есть величина постоянная для данного треугольника. Доказать.

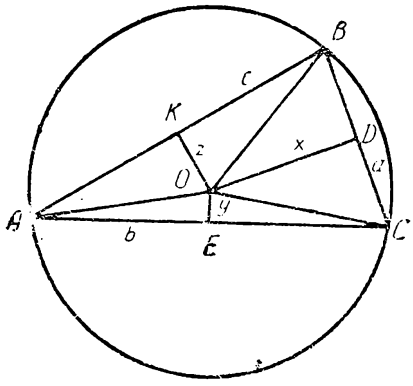
Р е ш е н и е. Требуемое утверждение можно доказать геометрически различными способами, но все они требуют

более или менее значительных построений, рассуждений и доказательств; между тем, тригонометрическое доказательство является, по-видимому, простейшим. Действительно, пусть $BA = BC$ и K — произвольная точка на основании AC (черт. 14).

Обозначим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$; по построению $KM \perp BC$ и $KD \perp AB$.

Из треугольников KMC и ADK находим: $KM = KC\sin\alpha$, $KD = AK\sin\alpha$, следовательно, $KM + KD = KC\sin\alpha + AK\sin\alpha = AC\sin\alpha$, а это есть величина постоянная для данного треугольника.

Пример 24. Если x, y и z есть расстояния от центра описанной окружности до сторон a, b и c треугольника ABC, то $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{4xyz}$. Доказать.



Черт. 15.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр описанной окружности (черт. 15), по построению имеем: $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ и $OK \perp AB$; тогда $BD = DC$, $AE = EC$, $AK = KB$. $\angle B = \angle AOE$, так как каждый из них измеряется половиной дуги AC. Аналогично $\angle A = \angle BOD$, $\angle C = \angle BOK$, следовательно, $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\angle AOE = \frac{AE}{OE} = \frac{b}{2y}$. Точно так же находим $\operatorname{tg} C = \frac{c}{2z}$; $\operatorname{tg} A = \frac{a}{2x}$. Но A, B и C как углы треугольника связаны соотношением: $A + B + C = 180°$, а поэтому $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ (см. стр. 128). Подставляя сюда значения тангенсов углов, имеем:

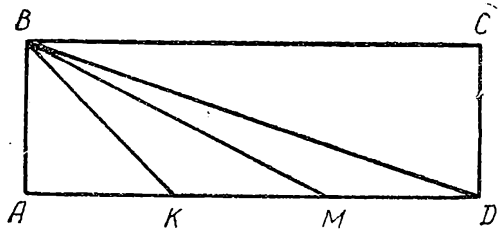
$$\frac{a}{2x} + \frac{b}{2y} + \frac{c}{2z} = \frac{abc}{8xyz}, \text{ откуда } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{4xyz}.$$

Полученное соотношение теряет смысл в прямоугольном треугольнике, так как тогда $z = 0$ (считая $C = 90°$). В этом случае x и y являются средними линиями тре-

угольника и рассматриваемое соотношение можно заменить таким:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c^2}{2xy}.$$

Пример 25. В прямоугольнике $ABCD$ (черт. 16) дано: $AB = AK = KM = MD$. Доказать, что $\angle BDA+\angle BMA = \angle BKA$.



Черт. 16.

Р е ш е н и е. Геометрическое решение этой задачи довольно сложное, между тем с помощью тригонометрии задача решается значительно проще.

Очевидно, что $\angle BKA = 45°$, поэтому остается доказать, что $\angle BDA+\angle BMA=45°$. Так как

$$\operatorname{tg}\angle BDA=\frac{BA}{AD}=\frac{1}{3};\ \operatorname{tg}\angle BMA=\frac{BA}{MA}=\frac{1}{2},$$

то

$$\operatorname{tg}(\angle BDA+\angle BMA)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1$$

и, следовательно, $\angle BDA + \angle BMA = 45°$ (так как все рассматриваемые углы — острые).

Применение тригонометрии к решению стереометрических задач мы рассматриваем в следующем разделе.

Задачи, приведенные ниже и решаемые нами при повторении различных разделов тригонометрии, достаточно различны как по содержанию, так и по методам их решения, но все они, по нашему мнению, достаточно поучительны и представляют значительный интерес для учащихся.

Пример 26. Доказать, что если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$, то $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$.

Р е ш е н и е. В книге «Сборник задач по алгебре и элементарным функциям» А. К. Давыдова (Учпедгиз,

1955 г.) приведено довольно сложное решение этой задачи (№ 1299); к тому же это решение математически не вполне строгое, так как, во-первых, не доказана возможность перехода от полученного автором тождества к требуемому, и, во-вторых, автор рассмотрел арифметические значения квадратных корней не для всех допустимых значений аргументов, ибо по условию задачи никакие ограничения на аргументы не налагаются. Между тем нетрудно дать более простое, математически строгое и вполне естественное решение этой задачи.

Допустимые значения для аргументов определяются неравенствами:

$$\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2};\ \alpha+\beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2};\ \beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

(при $\beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ получаем $-\operatorname{ctg}\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}^2\alpha = -3$, что невозможно).

Так как требуемое соотношение содержит функции синус, то переходим в заданном соотношении к синусам и косинусам:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \text{или}\quad \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha = 3\sin\alpha\cos(\alpha+\beta).$$

Стремясь получить угол $2\alpha+2\beta$, входящий в искомое соотношение, получим сперва угол $2\alpha+\beta$ путем преобразования полученных произведений в суммы:

$$\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta = 3[\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta],$$

или

$$2\sin(2\alpha+\beta) = 4\sin\beta.$$

Теперь замечаем, что достаточно умножить обе части тождества на $\cos\beta$, чтобы правая часть приобрела требуемый вид.

Получаем: $2\sin(2\alpha+\beta)\cos\beta = 2\sin 2\beta$.

Наконец, преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получаем: $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$, что и требовалось доказать.

Пример 27. Вычислить без таблиц:

а) $\operatorname{tg}9^\circ - \operatorname{tg}27^\circ - \operatorname{tg}63^\circ + \operatorname{tg}81^\circ$; б) $\operatorname{tg}20^\circ + 4\sin 20^\circ$;

в) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Р е ш е н и е. а) $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) =$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} = \frac{2}{2\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{2}{2\cos 27^\circ \sin 27^\circ} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{2 \cdot 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \cos 36^\circ} = 4;$$

б) $\operatorname{tg} 20^\circ + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$

$$= \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \cos 30^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3};$$

в) $$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = \frac{4(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Пример 28. Доказать тождества: а) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0$; б) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ = \frac{3}{4}$; в) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. а) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ =$
$= 2 \cos 60^\circ \cos 5^\circ + \cos (180^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 0;$
б) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ =$

$$= \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 10^\circ + \cos 240^\circ + \cos 110^\circ + \cos 230^\circ +$$

$$+ \cos 120^\circ) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + \cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 230^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2} + 2 \cos 60^\circ \cos 50^\circ + \cos (180^\circ + 50^\circ)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + \cos 50^\circ - \cos 50^\circ\right) = -\frac{3}{4};$$

в) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = \frac{\cos 120^\circ + \cos 10^\circ}{2}(-\cos 5^\circ) =$

$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 5^\circ + \cos 10^\circ \cos 5^\circ\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 5^\circ + \right.$

$\left. + \frac{\cos 15^\circ + \cos 5^\circ}{2}\right) = -\frac{1}{4}\cos 15^\circ = -\frac{1}{4}\cos(45^\circ - 30^\circ) =$

$= -\frac{1}{4}(\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \right.$

$\left. + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{4} = -\frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}.$

Пример 29. Доказать тождество:

$$16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1.$$

Р е ш е н и е. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} =$

$$= 16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) =$$

$$= \frac{-16\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} =$$

$$= \frac{-8\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{-4\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} =$$

$$= -\frac{2\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} = -\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} = \frac{\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}} = 1.$$

Пример 30. Возможно ли равенство:

$$\sin\alpha = 2\sin 68^\circ \cos 42^\circ?$$

Р е ш е н и е. $\sin 68^\circ > \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 42^\circ > \cos 45^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $2\sin 68^\circ \cos 42^\circ > 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$

и, следовательно, заданное равенство невозможно.

Пример 31. Найти значение выражения $a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$, зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения: $ax^2+bx+c=0$.

Р е ш е н и е. Согласно теореме Виета должны иметь место равенства: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a}$; $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a}$, тогда легко находим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\frac{b}{a}:\left(1-\frac{c}{a}\right)=\frac{b}{c-a}.$$

Данное выражение нетрудно выразить через $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; можно, например, переписать его в виде:

$$\frac{a}{2}[1-\cos(2\alpha+2\beta)]+\frac{b}{2}\sin(2\alpha+2\beta)+\frac{c}{2}[1+\cos(2\alpha+2\beta]$$

и затем воспользоваться формулами:

$$\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)},\quad \sin(2\alpha+2\beta)=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}.$$

Можно поступить и иначе. Вынося $\cos^2(\alpha+\beta)$ за скобки, находим:

$$\cos^2(\alpha+\beta)[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]=$$

$$=\frac{a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{ab^2}{(c-a)^2}+\dfrac{b^2}{c-a}+c}{1+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}}=$$

$$=\frac{ab^2+b^2(c-a)+c(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}=\frac{c(b^2+c^2-2ac+a^2)}{(c-a)^2+b^2}=c.$$

Пример 32. Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что угол, противолежащий средней по величине стороне треугольника, не может быть больше 60°.

Р е ш е н и е. Обозначим стороны треугольника так: a; $a+d$; $a+2d$, а угол, противолежащий стороне $a+d$, через β, тогда по теореме косинусов найдем:

$$(a+d)^2=a^2+(a+2d)^2-2a(a+2d)\cos\beta,$$

откуда

$$2a(a+2d)\cos\beta=a^2+a^2+4ad+4d^2-a^2-2ad-d^2,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+2ad+3d^2}{2(a^2+2ad)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad}.$$

Очевидно, что $\frac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad} \geqslant 1$, поэтому $\cos\beta \geqslant \frac{1}{2}$, т. е. $\cos\beta \geqslant \cos 60°$, следовательно, $\beta \leqslant 60°$, что и требовалось доказать.

Пример 33. а) Доказать, что если равенство $\cos(\alpha_1 + x) + \cos(\alpha_2 + x) + \cdots + \cos(\alpha_n + x) = 0$ справедливо при $x = 0$ и при каком-нибудь значении $x = \beta \neq \pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots$, то оно справедливо при любом значении x.

б) Если функция $f(x) = A\cos x + B\sin x$ обращается в нуль при двух значениях аргумента x_1 и x_2 таких, что $x_1 - x_2 \neq k\pi$ (k — целое число), то она тождественно равна нулю.

Решения. а) Так как данное равенство справедливо при $x = 0$, то должно иметь место тождество:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n = 0. \qquad (1)$$

Так как данное равенство должно иметь место при $x = \beta$, то должно иметь место тождество $\cos(\alpha_1 + \beta) + \cos(\alpha_2 + \beta) + \cdots + \cos(\alpha_n + \beta) = 0$, или $\cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta + \cos\alpha_2\cos\beta - \sin\alpha_2\sin\beta + \cdots + \cos\alpha_n\cos\beta - \sin\alpha_n\sin\beta = 0$, или $(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n)\cos\beta - (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n)\sin\beta = 0$.

Принимая во внимание тождество (1), получаем равенство:

$$(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n)\sin\beta = 0.$$

По условию $\beta \neq \pi n$, поэтому $\sin\beta \neq 0$ и, следовательно, должно иметь место тождество:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n = 0. \qquad (2)$$

Умножив обе части тождества (1) на $\cos x$, а тождества (2) на $\sin x$ (x — произвольное число) и вычитая от первого результата второй, получим: $(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n)\cos x - (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n)\sin x = 0$, или $\cos\alpha_1\cos x - \sin\alpha_1\sin x + \cos\alpha_2\cos x - \sin\alpha_2\sin x + \cdots + \cos\alpha_n\cos x - \sin\alpha_n\sin x = 0$; откуда $\cos(\alpha_1 + x) + \cos(\alpha_2 + x) + \cdots + \cos(\alpha_n + x) = 0$.

б) Докажем, что $A = B = 0$.

Согласно условию задачи должны иметь место два тождества:

$$A\cos x_1+B\sin x_1=0; \quad (1)$$
$$A\cos x_2+B\sin x_2=0. \quad (2)$$

Если хотя бы одна из величин $\sin x_1$, $\cos x_1$, $\sin x_2$ или $\cos x_2$ равна нулю, то требуемое будет доказано. В самом деле, пусть, например, $\sin x_1=0$, тогда $\cos x_1\neq 0$ и тождество (1) дает $A=0$. Но тогда из тождества (2) будет следовать: $B\sin x_2=0$, откуда $B=0$ и требуемое доказано; равенство $\sin x_2=0$ невозможно, так как в сочетании с равенством $\sin x_1=0$ мы получили бы $x_1-x_2=k\pi$.

Предположим теперь, что $\sin x_1$, $\cos x_1$, $\sin x_2$ и $\cos x_2$ все отличны от нуля. Тогда из равенства (1) получаем: $A=\frac{-B\sin x_1}{\cos x_1}$, подставляя значение A в равенство (2), получим: $\frac{-B\sin x_1\cos x_2}{\cos x_1}+B\sin x_2=0$, откуда $B\sin(x_1-x_2)=0$. Согласно условию $\sin(x_1-x_2)\neq 0$, поэтому $B=0$. Теперь мы получаем два тождества: $A\cos x_1=0$ и $A\cos x_2=0$; если $A\neq 0$, то будет иметь место равенство: $x_1-x_2=k\pi$, но это противоречит условию, следовательно, $A=0$.

Пример 34. Углы треугольника связаны соотношением:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\cos^2\gamma=\frac{1}{4}.$$

Найти угол γ.

Р е ш е н и е. Преобразуем заданное соотношение:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\cos^2\gamma=\frac{1}{4},$$

или

$$1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-\cos^2\gamma=\frac{1}{4}.$$

Так как $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$, то получаем $1-\cos^2\gamma=\frac{1}{4}$, или $\sin^2\gamma=\frac{1}{4}$, а так как γ—угол треугольника, то $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, откуда $\gamma=30°$, или $\gamma=150°$.

Пример 35. Преобразовать в произведение: $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. По условию задачи $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ и, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}.$$

Теперь преобразуем данное выражение:

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1+1)=\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Пример 36. По данным двум простым гармоническим колебаниям найти амплитуду и начальную фазу результативного колебания: а) $s_1=3\sin 2t$; $s_2=2\sin 2t$. б) $s_1=4\sin 5t$; $s_2=3\cos 5t$.

Р е ш е н и е. Если колебание можно представить формулой $s=a\sin(\omega t+\varphi)$, то φ — начальная фаза, а a — амплитуда колебания. Имеем:

а) $s=3\sin 2t+2\sin 2t=5\sin 2t$, следовательно, $a=5$; $\varphi=0$;

б) $s=4\sin 5t+3\cos 5t=\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{4}{5}\sin 5t+\frac{3}{5}\cos 5t\right)=$

$=5(\cos\alpha\sin 5t+\sin\alpha\cos 5t)=5\sin(5t+\alpha)$, где $\alpha=$

$=\arccos\frac{4}{5}$. Следовательно, $a=5$; $\alpha\approx 0{,}64$.

Пример 37. Если котангенсы углов треугольника образуют арифметическую прогрессию, то квадраты сторон треугольника также образуют арифметическую прогрессию. Доказать.

Р е ш е н и е. По условию задачи $2\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma$, надо доказать:

$$2b^2=a^2+c^2.$$

Имеем: $2\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma$. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma};$$

$$2\cos[180°-(\alpha+\gamma)]\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta\sin(180°-\beta);$$
$$-\cos(\alpha+\gamma)[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)]=\sin^2\beta;$$
$$-\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)+\cos^2(\alpha+\gamma)=\sin^2\beta;$$
$$-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\gamma}{2}+\cos^2\beta=\sin^2\beta;$$
$$-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\gamma)+\cos^2\beta=\sin^2\beta;$$
$$-1+\sin^2\alpha+\sin^2\gamma+\cos^2\beta=\sin^2\beta;\quad \sin^2\alpha+\sin^2\gamma=2\sin^2\beta.$$

Умножив обе части этого равенства на $4R^2$, получим: $4R^2\sin^2\alpha+4R^2\sin^2\gamma=8R^2\sin^2\beta$, или $a^2+c^2=2b^2$, что и требовалось доказать.

Пример 38. Решить уравнение: $4\cos^2 x-\sqrt{2}\sin^3 x=0$.

Р е ш е н и е. Заменяя $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, мы сразу получаем алгебраическое уравнение относительно $\sin x$:
$4(1-\sin^2 x)-\sqrt{2}\sin^3 x=0$, или $\sqrt{2}\sin^3 x+4\sin^2 x-4=0$.

Обозначая $\sqrt{2}\sin x=y$, приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2}y^3+2y^2-4=0;\quad y^3+4y^2-8=0;\quad y^3+2y^2+2y^2-8=0;$$
$$y^2(y+2)+2(y+2)(y-2)=0;\quad (y+2)(y^2+2y-4)=0.$$

Если $y+2=0$, то $y=-2$, т. е. $\sqrt{2}\sin x=-2$, $\sin x=-\sqrt{2}$, решений нет.

Если $y^2+2y-4=0$, то $y=-1\pm\sqrt{5}$, т. е. $\sqrt{2}\sin x=-1\pm\sqrt{5}$.

Уравнение $\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ дает решение: $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$, а уравнение $\sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ решений не имеет, так как $\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right|>1$.

Пример 39. Решить уравнение:

$$\cos^2 x-\sin x\cos 4x-\cos^2 4x=\frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Понизим степень косинусов и преобразуем $\sin x\cos 4x$ в сумму:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sin 5x-\sin 3x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1}{4};$$

$$\cos 2x - \sin 5x + \sin 3x - \cos 8x = \frac{1}{2};$$

$$2 \sin 5x \sin 3x - \sin 5x + \sin 3x = \frac{1}{2};$$

$$2 \sin 5x \left(\sin 3x - \frac{1}{2} \right) + \sin 3x - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\left(\sin 3x - \frac{1}{2} \right) (2 \sin 5x + 1) = 0.$$

Получаем два уравнения:

$$1) \ \sin 3x - \frac{1}{2} = 0; \quad \sin 3x = \frac{1}{2}; \quad 3x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6};$$

$$x = \frac{\pi n}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18};$$

$$2) \ 2 \sin 5x + 1 = 0; \quad \sin 5x = -\frac{1}{2}; \quad 5x = \pi n - (-1)^n \frac{\pi}{6};$$

$$x = \frac{\pi n}{5} - (-1)^n \frac{\pi}{30}.$$

Второй способ. Обратив внимание на второе и третье слагаемые, нетрудно заметить, что в левой части уравнения можно выделить точный квадрат, тогда дальнейшее решение уравнения уже не вызывает трудностей.

$$4 (1 - \sin^2 x) - 4 \sin x \cos 4x - 4 \cos^2 4x = 1;$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos 4x + 4 \cos^2 4x - 3 = 0;$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos 4x + \cos^2 4x + 3 \cos^2 4x - 3 = 0;$$

$$(2 \sin x + \cos 4x)^2 - (\sqrt{3} \sin 4x)^2 = 0;$$

$$(2 \sin x + \cos 4x - \sqrt{3} \sin 4x)(2 \sin x + \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x) = 0;$$

$$\left(\sin x + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x \right) \left(\sin x + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x \right) = 0;$$

$$\left[\sin x + \sin \left(\frac{\pi}{6} - 4x \right) \right] \left[\sin x + \sin \left(\frac{\pi}{6} + 4x \right) \right] = 0;$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} - \frac{5x}{2} \right) \ 2 \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{5x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3x}{2} \right) = 0.$$

Получим четыре уравнения:

$$1)\ \sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=0; \qquad 2)\ \cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=0;$$

$$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{12}=k\pi; \qquad \frac{5x}{2}-\frac{\pi}{12}=(2k+1)\frac{\pi}{2};$$

$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}; \qquad x=\frac{(2k+1)}{5}\pi+\frac{\pi}{30};$$

$$3)\ \sin\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0; \qquad 4)\ \cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0;$$

$$\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{12}=k\pi; \qquad \frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}=(2k+1)\frac{\pi}{2};$$

$$x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{30}. \qquad x=\frac{(2k+1)\pi}{3}-\frac{\pi}{18}.$$

Ответы первого и четвертого уравнений можно объединить в одну формулу $x=\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}$, а ответы второго и третьего уравнений в формулу $x=\frac{\pi n}{5}-(-1)^n\frac{\pi}{30}$.

Пример 40. Решить уравнение:

$$26\sin^2 x^2+12\cos 2x+5\sin 2x=13.$$

Р е ш е н и е. Это уравнение не только интересное, но и поучительное, ибо решить его удается только введением вспомогательного угла.

Преобразуем уравнение так. Делим все члены уравнения на $\sqrt{12^2+5^2}=13$:

$$2\sin^2 x^2+\frac{12}{13}\cos 2x+\frac{5}{13}\sin 2x=1.$$

Вводим вспомогательный угол γ равенством $\cos 2\gamma=\frac{12}{13}$, тогда $\sin 2\gamma=\frac{5}{13}$, а уравнение преобразуется так:

$$2\sin^2 x^2+\cos 2\gamma\cos 2x+\sin 2\gamma\sin 2x=1;$$

$$2\sin^2 x^2+\cos(2x-2\gamma)=1;$$

$$1-\cos 2x^2+\cos(2x-2\gamma)=1;$$

$$\cos 2x^2-\cos(2x-2\gamma)=0;$$

$$2\sin(x^2+x-\gamma)\sin(x-\gamma-x^2)=0.$$

Получаем два уравнения:

1) $\sin(x^2+x-\gamma)=0$; $x^2+x-\gamma=k\pi$; $x^2+x-(\gamma+k\pi)=0$; $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\gamma+4k\pi}}{2}$.

2) $\sin(x-\gamma-x^2)=0$; $x-\gamma-x^2=k\pi$; $x^2-x+\gamma+k\pi=0$; $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\gamma-4k\pi}}{2}$.

Пример 41. Решить уравнение:

$$|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение так:

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}};\quad \left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin 2x\neq 0.$$

Если $\sin 2x>0$, то $\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=\frac{2}{\sin 2x}$ и мы получаем уравнение:

$\frac{2}{\sin 2x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$; $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi n}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}=$

$=\frac{\pi}{6}[3n+(-1)^n]$.

Если $\sin 2x<0$, то $\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=-\frac{2}{\sin 2x}$ и мы получаем уравнение: $-\frac{2}{\sin 2x}=\frac{4}{\sqrt{3}}$, $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

$x=n\frac{\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}[3n-(-1)^n]$.

При n — четном и нечетном получаем две формулы:

$x=\frac{\pi}{6}(3n+1)$ и $x=\frac{\pi}{6}(3n-1)$, или $x=\frac{\pi}{6}(3n\pm 1)$.

Пример 42. Доказать, что для любого значения α справедливо неравенство:

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant 1.$$

Р е ш е н и е. Так как $0\leqslant|\sin\alpha|\leqslant 1$, то
$|\sin\alpha|\geqslant|\sin\alpha||\sin\alpha|$, $|\sin\alpha|\geqslant|\sin\alpha|^2$, или $|\sin\alpha|\geqslant|\sin^2\alpha|$;
аналогично $|\cos\alpha|\geqslant\cos^2\alpha$; поэтому
$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, или $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant 1$.

Пример 43. Если A, B, C составляют арифметическую прогрессию, то $\sin A - \sin C = 2\sin(A-B)\cos B$. Доказать.

Р е ш е н и е. По условию задачи $A+C=2B$, откуда $C=2B-A$. Преобразуем левую часть равенства: $\sin A - \sin C = \sin A - \sin(2B-A) = 2\sin(A-B)\cos B$, что и требовалось доказать.

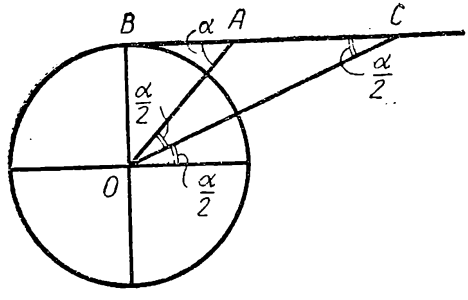
Пример 44. Доказать, что $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1+\operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<\pi$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим разность:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

В силу условия задачи $\sin\alpha > 0$, поэтому $\frac{1}{\sin\alpha} \geqslant 1$, т. е. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Доказываемое неравенство легко интерпретируется геометрически.



Черт. 17.

На чертеже 17 изображена единичная окружность и показаны котангенсы углов α и $\frac{\alpha}{2}$ — абсциссы соответствующих точек оси котангенсов.

Из чертежа видно, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\alpha = BC - BA = AC = AO > 1.$$

Пример 45. Решить неравенства:

а) $\cos^2 x + 2\cos x > 0$;

б) $3\sin^2 x + 2\cos x + 4\cos^2 x > 0$;

в) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x < 0$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуя левую часть неравенства к виду: $\cos x(\cos x + 2)$ и замечая, что при любом x имеет место неравенство: $\cos x + 2 > 0$, приходим к выводу, что дан-

ное неравенство выполняется при условии, если $\cos x > 0$, т. е. решениями данного неравенства будут:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi.$$

б) Так как $3\sin^2 x + 3\cos^2 x = 3$, то заданное неравенство можно заменить следующим: $3 + 2\cos x + \cos^2 x > 0$, или $2 + (1 + \cos x)^2 > 0$, а это неравенство выполняется при всех x.

в) Легко видеть, что данное неравенство не может удовлетворяться такими значениями аргумента, при которых $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, так как в этом случае данное неравенство приводится к невозможному: $\sin^2 x < 0$.

Разделив обе части данного неравенства на $\cos^2 x > 0$, получаем эквивалентное неравенство: $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 < 0$.

Так как уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$ имеет корни $\operatorname{tg} x = -3$ и $\operatorname{tg} x = 1$, то данное неравенство можно преобразовать так:

$$(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x - 1) < 0.$$

Из двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 3 > 0; \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \operatorname{tg} x + 3 < 0; \\ \operatorname{tg} x - 1 > 0; \end{cases}$$

решение имеет только первая: $-3 < \operatorname{tg} x < 1$.

Так как $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3$ — функция периодическая, период которой равен π, то последнее неравенство рассмотрим на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. В силу монотонности функции $\operatorname{tg} x$ на этом интервале получаем решение последнего неравенства: $\operatorname{arc\,tg}(-3) < x < \operatorname{arc\,tg} 1$, а все решения заданного неравенства будут: $k\pi - \operatorname{arc\,tg} 3 < x < k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Если бы мы взяли для исследования сегмент $[0; \pi]$, то его следовало бы разбить на такие интервалы и полуинтервалы:

$$\left[0; \frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}; \pi - \operatorname{arc\,tg} 3\right); (\pi - \operatorname{arc\,tg} 3; \pi]$$

и установить знак функции $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3$ на каждом из этих промежутков. И в этом случае мы придем к тем же решениям, что и раньше.

Пример 46. Доказать тождество: $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

Р е ш е н и е. В сборнике задач по математике К. С. Барыбина и А. К. Исакова к этой задаче, № 1490 (13), дано такое указание:

«Взять $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha$; $2\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha=-4\operatorname{ctg}4\alpha$; $4\operatorname{tg}4\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha=-8\operatorname{ctg}8\alpha$ и сложить».

Учащимся трудно додуматься до этого решения и оно кажется им очень искусственным. Многие учащиеся затрудняются в решении этой задачи еще и потому, что пытаются сделать это по шаблону, не учитывая особенностей левой части тождества. Между тем эта задача весьма поучительна в смысле логического обоснования поисков решения.

Обычно, имея 4 слагаемых, их группируют и складывают по 2, но в данном примере это делать нецелесообразно, так как такая группировка может быть полезной только в том случае, если слагаемые, а следовательно, и суммы, аналогичны; в данном случае этого нет.

Но если отпадает группировка по 2, то остается только постепенное сложение слагаемых. Нетрудно понять, что в первую же сумму следует взять $8\operatorname{ctg}8\alpha$: во-первых, потому, что это единственный котангенс, в то время как функция тангенс встречается в трех слагаемых, и, во-вторых, потому, что это слагаемое содержит угол 8α, который необходимо преобразовать (так как правая часть тождества содержит угол α). Нетрудно заметить, что к $8\operatorname{ctg}8\alpha$ следует прибавить $4\operatorname{tg}4\alpha$, так как эти слагаемые наиболее близки по аргументам и именно эти аргументы нам надлежит изменить. Выполняем сложение:

$$4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=4\operatorname{tg}4\alpha+\frac{8(1-\operatorname{tg}^2 4\alpha)}{2\operatorname{tg}4\alpha}=$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}^2 4\alpha+4-4\operatorname{tg}^2 4\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha}=4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

Таким образом, левая часть данного тождества равна:

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

Рассуждая аналогично, находим:

$$2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha=2\operatorname{tg}2\alpha+\frac{4(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{2\operatorname{tg}2\alpha}=$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha;$$

наконец,

$$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Последние два преобразования можно было не выполнять, так как они являются непосредственными следствиями из тождества: $\operatorname{tg} 4\alpha + 2\operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} 4\alpha$, если в нем дважды заменить 2α на α.

Пример 47. Какому условию должны удовлетворять значения параметра a, чтобы уравнение $\sin x = \frac{2a-3}{4-a}$ имело решения?

Р е ш е н и е. К этому примеру в задачнике П. В. Стратилатова [№ 565(1)] ответа нет, между тем многие учащиеся допускают ошибки при решении его.

Прежде всего должны выполняться следующие неравенства:

$$a \neq 4 \quad \text{и} \quad \left|\frac{2a-3}{4-a}\right| \leqslant 1.$$

Заметим далее, что решая неравенство $|y| < b$ (причем $b > 0$, так как при $b \leqslant 0$ неравенство решений не имеет) мы приходим к двум системам:

$$\begin{array}{ll} 1)\ y \geqslant 0; & 2)\ y < 0; \\ \quad y < b; & \quad -y < b, \end{array}$$

решения которых 1) $0 \leqslant y < b$ и 2) $0 > y > -b$ можно объединить так: $b > y > -b$.

Подобное неравенство мы имеем и в данном случае, т. е. решение неравенства $\left|\frac{2a-3}{4-a}\right| \leqslant 1$ сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \frac{2a-3}{4-a} \leqslant 1; \\ \frac{2a-3}{4-a} \geqslant -1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{3a-7}{4-a} \leqslant 0; \\ \frac{a+1}{4-a} \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{3a-7}{4-a} \leqslant 0$ выполняется в двух случаях:

1) $a \leqslant \frac{7}{3}$; 2) $a > 4$, а неравенство $\frac{a+1}{4-a} \geqslant 0$ выполняется при $4 > a \geqslant -1$. Из двух систем:

$$\begin{cases} a \leqslant \frac{7}{3}; \\ 4 > a \geqslant -1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a > 4; \\ 4 > a \geqslant -1; \end{cases}$$

решения имеет только первая.

Окончательно получаем: $-1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}$.

VIII. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Большинство задач, рассматриваемых в этом разделе,— это задачи по стереометрии на вычисление. Задачи на вычисление являются наиболее важными среди задач, решаемых в школе; они понятны учащимся и вместе с тем предоставляют учителю большие возможности для развития вычислительных навыков, пространственных представлений и логического мышления учащихся. Поэтому не удивительно, что задачи на вычисление составляют основную массу задач, решаемых в школе.

Ниже мы рассказываем о тех способах решения стереометрических задач на вычисление, которые мы изучаем с учащимися, и о тех приемах, которые упрощают решение таких задач.

1. РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ.

Невозможно указать все способы и приемы, применяемые при решении стереометрических задач на вычисление; в этом и нет необходимости. Более того, было бы вредным, если бы всякую задачу по стереометрии учащиеся старались подвести под какой-то шаблон. Но на собственном опыте мы убедились, что ясное и четкое разъяснение учащимся основных, наиболее употребительных способов и приемов решения стереометрических задач очень помогает при обучении решению задач. Эти знания расширяют математи-

ческий кругозор учащихся, дают им возможность легко ориентироваться в сложных задачах и расчленять их на более простые.

Решение стереометрической задачи на вычисление с параметрическими данными (в средней школе) сводится к установлению определенной функциональной зависимости (обычно в виде формулы) между данными и искомыми величинами.

Если не принимать во внимание задачи, решение которых сводится к простой подстановке числовых данных в готовые формулы, то окончательная формула решения получается обычно как результат исключения из системы функциональных зависимостей некоторых величин.

Способы решения геометрических задач на вычисление зависят от того, можно ли все функциональные зависимости, которые необходимо установить для решения задачи, получить сразу в явном виде, или же этого сделать нельзя и некоторые из них мы вынуждены сперва получать в неявном виде (в последнем случае для решения задачи часто приходится вводить некоторые вспомогательные величины).

Исходя из этого, можно указать два возможных пути решения геометрических задач на вычисление:

1) непосредственное нахождение неизвестных величин;

2) нахождение неизвестных величин при помощи составления уравнений.

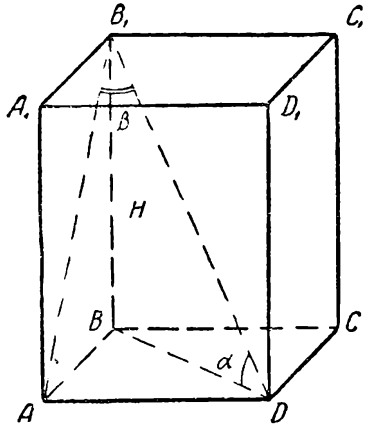
Непосредственное нахождение неизвестных величин.

При решении стереометрических задач на вычисление этот способ чаще всего осуществляется так.

Находят такую фигуру (чаще всего треугольник), в которой имеется достаточное количество данных для нахождения других ее элементов. Далее рассматривают ряд других прилежащих к ней фигур (чаще всего также треугольников) так, чтобы в результате последовательного вычисления элементов этих фигур можно было найти искомую величину.

Задача 1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β. Высота параллелепипеда равна H. Найти объем параллелепипеда (черт. 18).

Р е ш е н и е*. По условию параллелепипед прямоугольный, поэтому $DA \perp AB$ и $DA \perp AA_1$, следовательно, DA есть перпендикуляр к плоскости грани A_1ABB_1. Отсюда следует, что AB_1 есть проекция наклонной B_1D на плоскость AA_1B_1B и поэтому $\angle AB_1D$ есть угол наклона диагонали B_1D к этой грани и равен β. Аналогично устанавливаем, что $\angle B_1DB = \alpha$.



Черт. 18.

Заметив, что в треугольнике BB_1D имеется достаточно данных для его решения (катет и острый угол), мы начнем решение задачи именно с этого треугольника.

Из $\angle BB_1D$ находим:

$$B_1D = \frac{H}{\sin\alpha}.$$

К треугольнику BB_1D прилежит прямоугольный треугольник AB_1D (из того, что AD — перпендикуляр к плоскости AA_1B_1B, вытекает, что $AD \perp AB_1$), следовательно, найдя гипотенузу B_1D, мы сможем решить и этот треугольник.

Из треугольника AB_1D находим:

$$AD = B_1D \sin\beta = \frac{H\sin\beta}{\sin\alpha};\quad AB_1 = B_1D\cos\beta = \frac{H\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Зная AB_1, можно из прямоугольного треугольника AB_1B найти другую сторону основания:

$$AB^2 = AB_1^2 - BB_1^2 = \frac{H^2\cos^2\beta}{\sin^2\alpha} - H^2 = \frac{H^2(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{H^2}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) = \frac{H^2}{\sin^2\alpha}\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta);$$

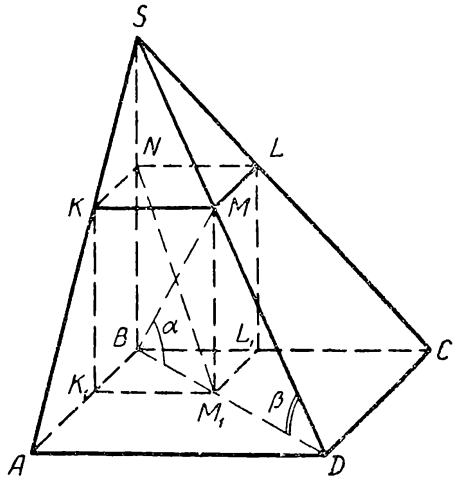
$$AB = \frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Находим объем:

$$V = AD\cdot AB\cdot BB_1 = \frac{H^3\sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

* В задачнике П. В. Стратилатова сказано (задача № 374): «... а с большей боковой гранью угол β»; между тем из приведенного ниже решения видно, что будет ли грань AA_1B_1B большей или меньшей на решение, ни исследование не изменяется.

Задача 2. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а большее боковое ребро ее наклонено к основанию под углом β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что четыре вершины его находятся на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие вершины — на основании пирамиды (черт 19). Найти объем параллелепипеда, если диагональ его образует с основанием угол α.



Черт. 19.

Р е ш е н и е. Верхнее основание параллелепипеда можно рассматривать как сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, поэтому основаниями параллелепипеда будут квадраты. Данные в задаче углы показаны на чертеже.

Первый способ. Приводим решение этой задачи, помещенное в журнале «Математика в школе» (1953, № 2, стр. 41—42).

а) $BD = a\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата $ABCD$). Из $\triangle SBD$, зная, что $\angle SDB = \beta$ и $\angle SBD = 90°$, находим: $SB = BD \cdot \operatorname{tg}\beta = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$.

б) Обозначим $BL_1 = x$, получим $BM_1 = x\sqrt{2}$, как диагональ квадрата $BL_1M_1K_1$. Из $\triangle NBM_1$, зная что $\angle NM_1B = \alpha$ и $\angle NBM_1 = 90°$, получаем: $BN = BM_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha = x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

в) $\triangle SBC \sim \triangle SNL$, так как $NL \parallel BC$.

$$\frac{NL}{BC} = \frac{SN}{SB};\ \frac{NL}{BC} = \frac{SB - BN}{SB};\ \frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta - x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta};$$

$$x\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{tg}\beta - x\operatorname{tg}\alpha;\ x(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = a\operatorname{tg}\beta;\ x = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Можно определить отрезок x и так: $\frac{BC - NL}{BC} = \frac{BN}{SB}$;

$$\frac{a-x}{a}=\frac{x\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta};$$

$$a\operatorname{tg}\beta=x(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta);\ x=\frac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

г) $V=x^2\cdot x\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha=x^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha.$

$$V=\frac{a^3\operatorname{tg}^3\beta\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^3}=\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^3\beta\cos^3\alpha\cos^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Второй способ. Решим эту задачу методом непосредственного нахождения неизвестных величин. В треугольнике BMD есть достаточное количество данных для его решения (сторона и два угла), поэтому решение задачи начинаем именно с этого треугольника. По теореме синусов имеем:

$\frac{BM}{BD}=\frac{\sin\beta}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}$ и так как $BD=a\sqrt{2}$, то $BM=$

$$=\frac{a\sqrt{2}\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника BM_1M находим высоту M_1M параллелепипеда

$$M_1M=BM\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

и диагональ BM_1 его основания

$$BM_1=BM\cos\alpha=\frac{a\sqrt{2}\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Далее определяем площадь квадрата $K_1BL_1M_1$:

$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}BM_1^2=\frac{a^2\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Объем параллелепипеда

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Можно сразу найти высоту M_1M треугольника BMD, так как имеется достаточно данных для нахождения площади этого треугольника:

$$S_{\triangle BMD} = \frac{BD^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$, следовательно,

$$MM_1 = \frac{2S_{\triangle BMD}}{BD} = \frac{BD\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

далее находим

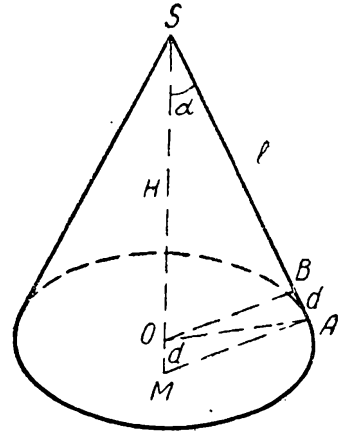
$$BM_1 = MM_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

и объем

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}\sin^3\beta\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Мы видим, что непосредственное нахождение неизвестных величин дает более простое решение (с наименьшим количеством преобразований), но часто это решение надо сознательно искать.

Задача 3. Разность между образующей и высотой конуса равна d, а угол между ними α. Найти объем конуса (черт. 20).



Черт. 20.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Чаще всего эту задачу решают так. По условию $l - H = d$, кроме того, очевидно, что $l = \frac{H}{\cos\alpha}$; подставляя в предыдущее равенство значение l, находим: $\frac{H}{\cos\alpha} - H = d$, откуда

$$H = \frac{d\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{d\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее находим радиус R основания конуса:

$$R = H\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\cos\alpha\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha} = \frac{d\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi d^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{d\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Между тем ответ к этой задаче обычно дают в таком виде:

$V=\dfrac{\pi d^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}}{3}$ (см. задачник Н. Рыбкина, §21, №38),

поэтому преобразуем полученное выражение:

$$V=\frac{\pi d^3}{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\pi d^3}{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi d^3}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Второй способ. Если использовать треугольник, имеющий достаточное количество данных для его решения, то можно получить более простое решение задачи.

Построим такой треугольник. С этой целью продолжим высоту SO на отрезок $OM=d$. Соединив точки M и A, получим треугольник OMA, в котором известен катет OM и $\angle OMA=\angle SAM=\frac{180°-\alpha}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}$ (следовательно, $\angle OAM=\frac{\alpha}{2}$). Из этого треугольника находим радиус R основания конуса: $R=OA=d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; тогда $H=R\operatorname{ctg}\alpha=d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

Наконец, находим объем конуса: $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=$ $=\frac{1}{3}\pi d^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

Можно было поступить иначе, а именно, на образующей SA отложить отрезок $SB=SO$, тогда $AB=d$. Соединив точки O и B, получим треугольник OAB, в котором

$$\angle AOB=90°-\angle SOB=90°-\frac{180°-\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2};$$

$$\angle ABO = 180° - \angle SBO = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

По теореме синусов находим:

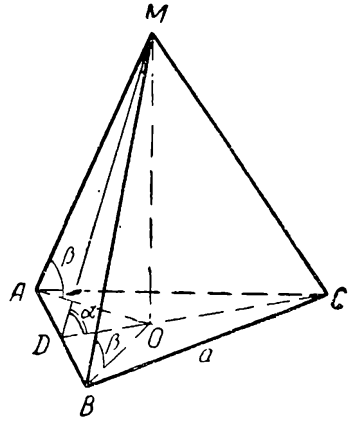
$$\frac{R}{d} = \frac{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}};\quad R = \frac{d\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = d\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ и т. д.}$$

Нахождение неизвестных величин при помощи составления уравнений.

Во всех задачах, рассмотренных нами в предыдущем разделе, нам удавалось построить такие треугольники, в которые входили данные линейные и угловые элементы; тем самым мы имели возможность найти в построенных треугольниках новые нужные нам элементы и выразить их явно через данные элементы.

Но во многих задачах по геометрии с применением тригонометрии данные линейные элементы не входят ни в один из треугольников, содержащих данные углы, или же длины отрезков вообще не даются. В таких задачах для нахождения искомых величин обычно прибегают к составлению уравнений.

Задача 4. Основание пирамиды — правильный треугольник, сторона которого равна a. Два боковых ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные β, а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом α. Найти объем пирамиды (черт. 21).



Черт. 21.

Р е ш е н и е. Из равенства треугольников MAO и MBO следует, что $AO=OB$, отсюда основание O высоты MO равноудаленно от концов A и B отрезка AB и находится на высоте CD правильного треугольника ABC.

Так как площадь основания $S_{\text{осн.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то задача сводится к нахождению высоты пирамиды. Данная сторона a

ни с одним из данных углов непосредственно не связывается, поэтому для нахождения высоты составим уравнение. Если стороны AO и DO прямоугольного треугольника AOD выразить через искомую высоту $MO = x$ и данные углы, то легко будет составить уравнение для нахождения высоты, так как в этом треугольнике известен катет $AD = \frac{a}{2}$. Действительно, из треугольников MAO и MDO находим:

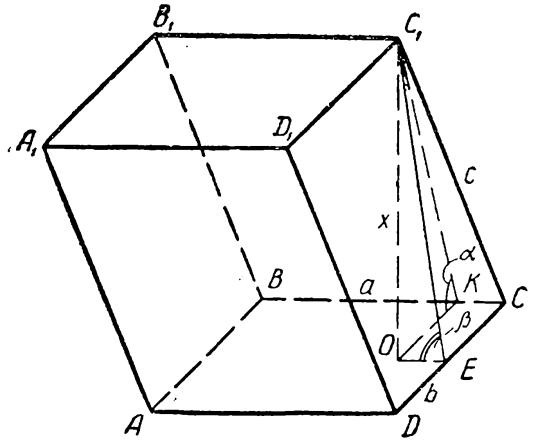
$$AO = MO\operatorname{ctg}\beta = x\operatorname{ctg}\beta;\quad DO = MO\operatorname{ctg}\alpha = x\operatorname{ctg}\alpha$$

и для определения x имеем уравнение $AO^2 - DO^2 = AD^2$, или

$$x^2\operatorname{ctg}^2\beta - x^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{a^2}{4},\ \text{откуда}\ x^2 = \frac{a^2}{4(\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha)};$$

$$\text{а}\quad x = \frac{a}{2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Известная сторона AD входит также в прямоугольный треугольник AMD, поэтому для составления уравнения



Черт. 22.

можно было выразить через x стороны MA и MD и воспользоваться соотношением: $MA^2 - MD^2 = AD^2$.

Искомый объем $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta - \operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

Задача 5. В основании наклонной призмы лежит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с основанием острые углы α и β. Боковое ребро равно c. Найти объем призмы (черт. 22).

Р е ш е н и е. По построению имеем: C_1O — перпендикуляр к плоскости основания, $C_1K \perp BC$, $C_1E \perp CD$; по теореме о трех перпендикулярах имеем: $OK \perp BC$ и $OE \perp DC$. Следовательно, $\angle C_1KO$ и $\angle C_1EO$ есть линейные углы двугранных углов, пусть $\angle C_1KO=\alpha$; $\angle C_1EO=\beta$.

Данное в условии задачи боковое ребро не входит ни в один из треугольников, содержащих данные углы, поэтому для нахождения высоты призмы составляем уравнение.

Обозначим высоту параллелепипеда через x, тогда

$$KC = OE = OC_1 \operatorname{ctg}\beta = x \operatorname{ctg}\beta;$$

$$C_1K = \frac{C_1O}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}.$$

Из треугольника C_1KC находим:

$$C_1C^2 = C_1K^2 + KC^2, \text{ или}$$

$$c^2 = \frac{x^2}{\sin^2\alpha} + x^2\operatorname{ctg}^2\beta = x^2(1+\operatorname{ctg}^2\alpha) + x^2\operatorname{ctg}^2\beta,$$

откуда

$$x^2 = \frac{c^2}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}; \quad x = \frac{c}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

Искомый объем:

$$V = \frac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

В некоторых случаях легче составить уравнения не непосредственно относительно искомых величин, а относительно некоторых вспомогательных величин. При помощи этих вспомогательных величин искомые величины задаются, как неявные функции от известных или ранее найденных величин.

В средней школе встречаются задачи, для решения которых вводят или вспомогательные отрезки, или вспомогательные углы.

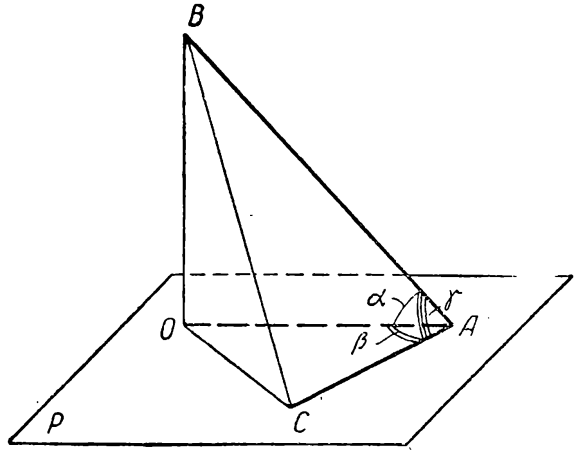
1) Введение вспомогательного отрезка.

В одних задачах, решаемых введением вспомогательных отрезков, величину этих отрезков вычислять нет необходимости, в других же задачах — их приходится вычислять.

Введение вспомогательного отрезка без нахождения его длины.

Задачами первого вида являются такие, в которых требуется определить пространственную фигуру с точностью до подобия. В этих задачах величину введенных вспомогательных отрезков обычно найти нельзя, но для решения задачи это и не нужно. Рассмотрим основные типы таких задач, встречающиеся в средней школе.

а) Задачи, в которых данными и искомыми элементами являются только углы (устанавливается определенная зависимость между углами).



Черт. 23.

Задача 6*. Наклонная образует с плоскостью угол α, через вершину этого угла проведена в данной плоскости прямая, которая образует с наклонной угол γ, а с проекцией наклонной угол β. Найти зависимость между углами α, β и γ (черт. 23).

Решение. *Первый способ.* По построению BA — наклонная, OB — перпендикуляр к плоскости P.

Проводим $BC \perp CA$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $OC \perp AC$.

За вспомогательный отрезок удобнее всего взять один из трех отрезков AO, AB или AC, каждый из которых входит в два треугольника, содержащих данные углы. Пусть $AO = a$, тогда $AC = AO \cos\beta = a\cos\beta$, далее находим:

* Формула, полученная в этой задаче, имеет широкое применение при решении многих стереометрических задач.

$$AB = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha};\ \cos\gamma = \frac{AC}{AB} = \frac{a\cos\beta}{\frac{a}{\cos\alpha}} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Искомая зависимость:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta,\ \text{или}\ \cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Второй способ. Введение вспомогательного отрезка можно осуществить еще и другим способом, сокращающим преобразования и записи.

Надо выразить тригонометрическую функцию угла γ через тригонометрические функции углов α и β. Для нахождения тригонометрической функции угла γ следует взять те стороны треугольника BAC, которые входят в треугольники, содержащие углы α и β. Такими являются гипотенуза AB и катет AC, следовательно, $\cos\gamma = \frac{AC}{AB}$. Если треугольники, содержащие данные углы (в нашей задаче треугольники OAC и OAB), имеют общую сторону (или по равной стороне), то ее и принимают за вспомогательный отрезок; в нашей задаче это отрезок OA. Теперь легко выразить отношение $\frac{AC}{AB}$ через тригонометрические функции углов α и β, для этого достаточно разделить каждый член отношения на OA:

$$\cos\gamma = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{OA}}{\frac{AB}{OA}} = \frac{\cos\beta}{\frac{1}{\cos\alpha}} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Деление на OA числителя и знаменателя дроби $\frac{AC}{AB}$ можно заменить умножением на этот отрезок:

$$\cos\gamma = \frac{AC\cdot OA}{AB\cdot OA} = \frac{AC}{OA}\cdot\frac{OA}{AB} = \cos\beta\cos\alpha.$$

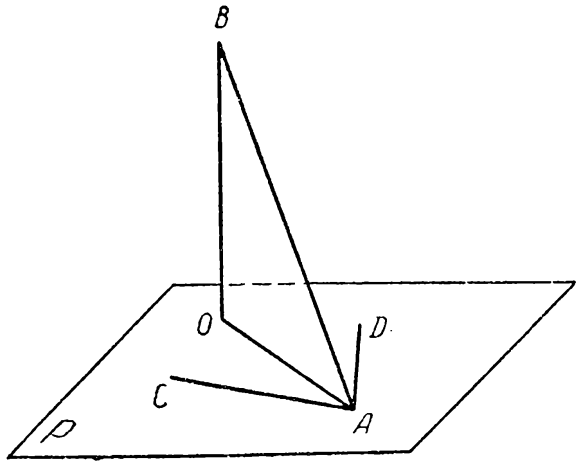
Из полученного соотношения можно легко получить утверждение, обобщающее теорему о трех перпендикулярах:

Если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составила со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной будет служить биссектрисой данного угла.

Действительно, пусть угол CAD лежит на плоскости P (черт. 24) и OA — проекция наклонной AB на эту плоскость. Согласно полученной формуле находим:

$$\cos \angle BAC = \cos \angle BAO \cdot \cos \angle OAC;$$
$$\cos \angle BAD = \cos \angle BAO \cdot \cos \angle OAD.$$

По условию задачи: $\angle BAC = \angle BAD$, поэтому: $\cos \angle BAO \cdot \cos \angle OAC = \cos \angle BAO \cdot \cos \angle OAD$, откуда: $\angle OAC = \angle OAD$, что и требовалось доказать.



Черт. 24.

Легко видеть, что если по условию задачи $\angle OAC = \angle OAD$, то по тем же формулам получили бы: $\angle BAC = \angle BAD$. Таким образом, имеет место и обратная теорема:

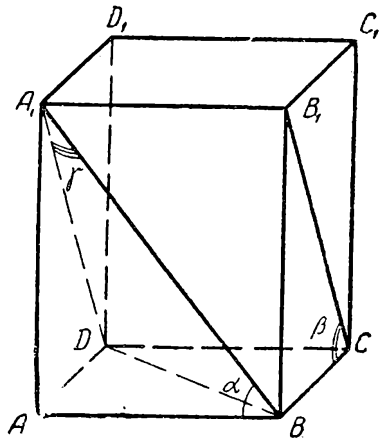
Если проекция наклонной на плоскость образует равные углы со сторонами угла, лежащего на плоскости, то и сама наклонная образует со сторонами этого угла равные углы.

Теорема о трех перпендикулярах есть частный случай этих утверждений, когда углы, образованные наклонной со сторонами угла, будут прямыми.

Задача 7. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β (черт. 25). Найти угол γ между этими диагоналями.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Угол между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1C есть угол DA_1B между прямой A_1B и прямой A_1D, параллельной прямой B_1C.

Так как высота параллелепипеда входит в два треугольника, содержащих данные углы α и β, то примем ее за вспомогательный отрезок. Обозначим $AA_1 = BB_1 = a$. Так как угол γ входит в косоугольный треугольник, то можно попытаться определить его, используя теорему косинусов. С этой целью выразим сначала стороны этого треугольника через высоту a и данные углы.



Черт. 25.

Имеем:

$$A_1D = B_1C = \frac{B_1B}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\beta};$$

$$A_1B = \frac{AA_1}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Для нахождения стороны BD находим раньше стороны AD и AB:

$AD = BC = BB_1\operatorname{ctg}\beta = a\operatorname{ctg}\beta$; $AB = AA_1\operatorname{ctg}\alpha = a\operatorname{ctg}\alpha$; $DB^2 = AD^2 + AB^2 = a^2\operatorname{ctg}^2\beta + a^2\operatorname{ctg}^2\alpha$.

По теореме косинусов имеем:

$DB^2 = A_1D^2 + A_1B^2 - 2A_1D \cdot A_1B\cos\gamma$, следовательно,

$$a^2\operatorname{ctg}^2\beta + a^2\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{a^2}{\sin^2\beta} + \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{2a^2}{\sin\alpha\sin\beta}\cos\gamma;$$

$$\frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{1}{\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}^2\beta + \frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha; \qquad \frac{2\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} = 2;$$

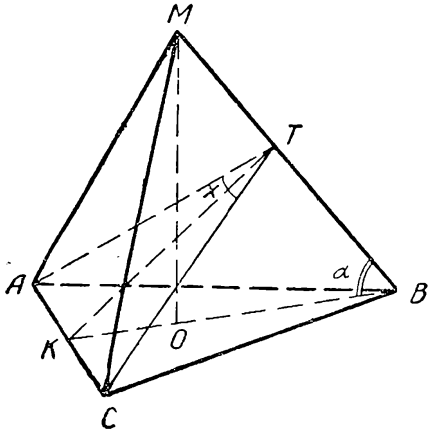
$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta.$$

Второй способ. Заметим, что задачу очень легко решить, если воспользоваться соотношением, выведенным в предыдущей задаче. В самом деле, прямая A_1D является наклонной к плоскости грани AA_1B_1B и образует с этой плоскостью $\angle AA_1D = 90° - \beta$. Эта же наклонная образует

с прямой A_1B, проведенной на плоскости, $\angle DA_1B = \gamma$, а проекция A_1A наклонной образует с той же прямой $\angle AA_1B = 90° - \alpha$. Мы видели, что косинус угла наклона прямой к плоскости равен частному от деления косинуса угла между наклонной и любой прямой, проведенной на плоскости, на косинус угла между проекцией наклонной и той же проведенной прямой, поэтому должно быть: $\cos(90°-\beta) = \frac{\cos\gamma}{\cos(90°-\alpha)}$ или $\sin\beta = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$, откуда $\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$. Еще один способ решения этой задачи мы рассмотрим ниже (стр. 237).

Задача 8. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α. Найти угол между смежными боковыми гранями.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Пусть в пирамиде $MABC$ угол ATC есть линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями, обозначим его через x (черт. 26).



Черт. 26.

В качестве вспомогательного отрезка целесообразнее всего взять сторону основания, так как вследствие правильности многоугольника основания это дает возможность определить его элементы (радиусы вписанного и описанного кругов, высоту и т. д.).

По построению $BK \perp AC$; нетрудно доказать, что $TK \perp AC$.

Обозначим $BC = a$. Выясним, какую функцию угла $\frac{x}{2}$ следует искать. Мы рекомендуем учащимся рассуждать так. Для искомого отношения следует несомненно взять сторону KC, так как она сразу же выражается через a: $KC = \frac{a}{2}$.

Остается выбрать одну из двух сторон: KT или CT. Очевидно, надо выбрать ту сторону, которую можно легко

найти, т. е. ту, которая входит в треугольник, содержащий данный угол α. Такой стороной является сторона KT, так как из треугольника KTB находим:

$$KT = KB \cdot \sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

Два катета KC и KT дают возможность найти котангенс (или тангенс) угла $\frac{x}{2}$ из треугольника KTC:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{KT}{KC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Второй способ. Еще лучше применить способ, изложенный при решении задачи 6.

Для нахождения угла $\frac{x}{2}$ следует взять катеты KT и KC, так как они входят в треугольники (KTB и KBC), содержащие данные углы (α и 30°), таким образом, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{KT}{KC}$. Треугольники KTB и KBC имеют общую сторону KB, поэтому, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{KT}{KC}$ на KB, получим:

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{KT \cdot KB}{KC \cdot KB} = \frac{KT}{KB} \cdot \frac{KB}{KC} = \sin\alpha \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}\sin\alpha^*.$$

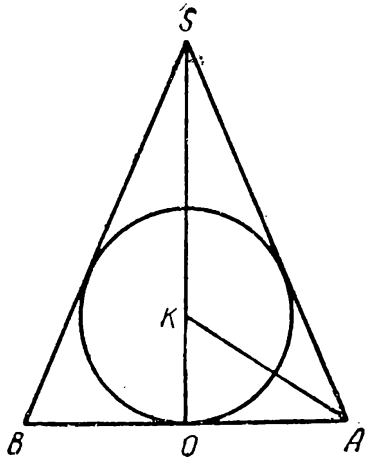
Мы остановились столь подробно на методике решения этой задачи потому, что задачи такого рода не только интересны сами по себе, но и являются основой, как мы увидим ниже, для очень важного метода решения задач — метода введения вспомогательного угла. Много таких задач содержится в задачнике Худобиных (№ 1779 — 1798 и др.), достаточное количество их имеется и в задачнике Стратилатова (№397 (1—4), 398 (1—3), 399, 400 и др). Большинство из них мы решаем в IX классе в четвертой четверти.

---

* Собрание подобных формул для 3, 4, 6 и n-угольной пирамиды имеется в статье П. И. Китайгородского «К методике решения задач по геометрии с применением тригонометрии» в книге «Из опыта преподавания математики в VIII — X классах средней школы», Учпедгиз, 1955.

б) Задачи, в которых дается отношение однородных величин и требуется найти какой-либо угол.

Решение таких задач (после введения вспомогательного отрезка) сводится к составлению и решению тригонометрического уравнения относительно искомого угла. Для составления тригонометрического уравнения выражают, обычно, каждую из однородных величин, о которых говорится в задаче, через вспомогательный отрезок и подставляют в данное отношение.



Черт. 27.

Задача 9. Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в m раз больше объема вписанного в конус шара.

Решение. В качестве вспомогательного отрезка возьмем радиус основания конуса, так как он непосредственно связывается и с радиусом шара и с элементами конуса (на чертеже 27 изображено сечение данной комбинации тел плоскостью, проходящей через ось конуса).

Обозначим $OA = R$; $\angle SAO = x$, тогда высота конуса $OS = OA \operatorname{tg} x = R \operatorname{tg} x$, а объем конуса $V_к = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg} x$.

Если K — центр вписанного шара, то KA — биссектриса угла SAO и тогда $\angle KAO = \frac{x}{2}$.

Из треугольника OAK находим радиус шара: $OK = OA \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = R \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Следовательно, объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$.

По условию задачи: $\frac{V_к}{V_ш} = m$. Подставляя значения $V_к$

и $V_ш$, получаем тригонометрическое уравнение:

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg} x}{\frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} = m.$$

Решим его: $\operatorname{tg} x = 4m \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$, $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0\right)$;

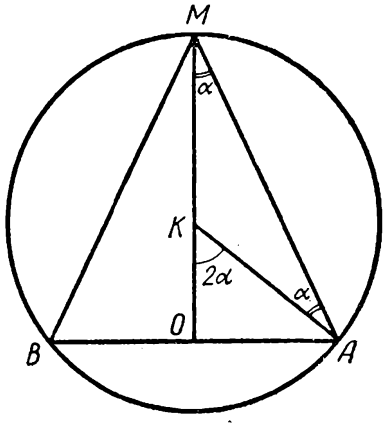
$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 4m \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};\ 1 = 2m \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2m} = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}$.

в) Задачи, в которых даны углы и требуется найти отношение однородных величин.

Задача 10. Определить отношение объема конуса к объему описанного около него шара, если образующая конуса составляет с его осью угол α.



Черт. 28.

Решение. Как и в предыдущей задаче, возьмем за вспомогательный отрезок радиус основания конуса: $OA = R$ (на чертеже 28 изображено сечение данной комбинации тел плоскостью, проходящей через ось конуса).

Высота конуса $MO = R \operatorname{ctg} \alpha$, а объем $V_к = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha$.

Так как $KM = KA$ (K — центр шара), то $\angle KAM = \angle KMA = \alpha$, а $\angle OKA = 2\alpha$ как внешний угол треугольника KMA. Из треугольника OKA находим:

$$KA = \frac{OA}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha};\ \text{объем шара } V_ш = \frac{4\pi R^3}{3 \sin^3 2\alpha}.$$

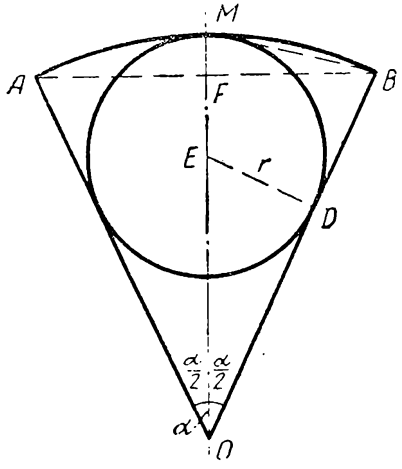
Искомое отношение:

$$\frac{V_к}{V_ш} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha}{\frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{\sin^3 2\alpha}} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\alpha \sin^3 2\alpha = \frac{1}{4}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \times$$

$$\times \sin^2 2\alpha = \frac{1}{2}\cos^2\alpha \sin^2 2\alpha.$$

г) Задачи, в которых данными являются только углы и площадь или углы и объем.

Задача 11. В шаровой сектор с углом α в осевом сечении вписан шар. Определить объем шарового сектора, если объем шара равен V (черт. 29).



Черт. 29.

Решение. Для нахождения объема сектора $V_{сек}$ выразим этот объем и данный объем V через какой-либо один и тот же отрезок, например через радиус ED шара ($ED \perp OB$), который мы обозначим через r.

Так как $V_{сек} = \frac{2}{3}\pi OB^2 \times$ $\times MF$, то решение задачи сводится к определению отрезков OB и MF. Выразим эти отрезки через r. Из треугольника OED имеем:

$$OE = \frac{ED}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

следовательно,

$$OB = OM = OE + EM = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r = \frac{r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника OFB находим:

$$FB = OB\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = r\cdot\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Наконец, из треугольника MFB получаем:

$$MF = FB \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Таким образом: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$$V_{\text{сек}} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{r^2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

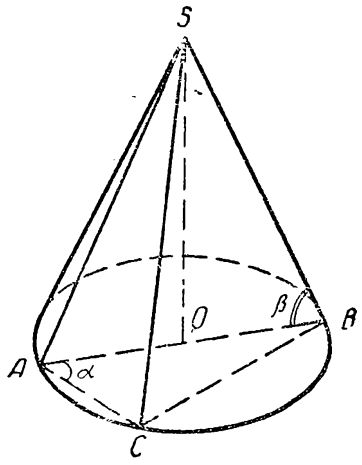
Находим отношение:

$$\frac{V_{\text{сек}}}{V} = \frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

следовательно,

$$V_{\text{сек}} = \frac{V\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

В рассмотренной нами задаче одна из данных величин и искомая величина являются однородными, однако для решения таких задач введением вспомогательного отрезка (без нахождения его длины) это требование не является необходимым; в следующем примере мы покажем, как следует поступать в тех случаях, когда эти величины не однородные.



Черт. 30.

Задача 12. В конус вписана пирамида, основанием кото-

рой служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Определить объем пирамиды, зная, что боковая поверхность конуса равна S, а образующая его наклонена к плоскости основания под углом β (черт. 30).

Р е ш е н и е. Обозначим радиус основания конуса через R, тогда диаметр $AB = 2R$, $AC = AB\cos\alpha = 2R\cos\alpha$. Далее находим площадь основания пирамиды — площадь треугольника ABC:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = R^2 \sin 2\alpha.$$

Высота пирамиды $SO = OB \cdot \operatorname{tg}\beta = R\operatorname{tg}\beta$, а объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} R^2 \sin 2\alpha \cdot R \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3} R^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Образующая конуса $SB = \dfrac{OB}{\cos\beta}$, а данная боковая поверхность конуса $S = \pi \cdot OB \cdot SB = \dfrac{\pi R^2}{\cos\beta}$. Возведя обе части этого равенства в степень $\dfrac{3}{2}$, получим величину третьего измерения, т. е. однородную с искомым объемом: $S^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{(\cos\beta)^{\frac{3}{2}}}$. Теперь находим отношение однородных величин:

$$\frac{V}{S^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{3} R^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta}{\frac{\pi^{\frac{3}{2}} R^3}{(\cos\beta)^{\frac{3}{2}}}},$$

откуда

$$V = \frac{1}{3\pi^{\frac{3}{2}}} \sin 2\alpha\, S^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg}\beta\, (\cos\beta)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sin 2\alpha \sin\beta}{3\pi^{\frac{3}{2}} \cos\beta} \sqrt{S^3 \cos^3\beta} =$$

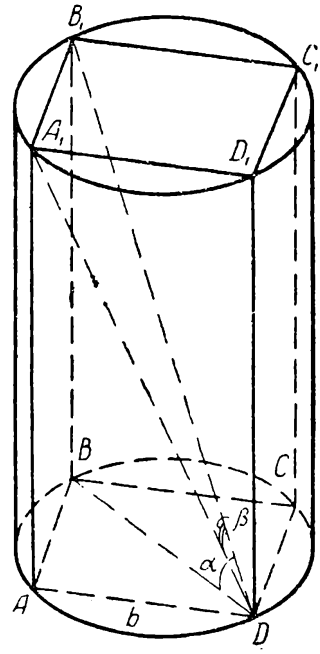
$$= \frac{1}{3} \sin 2\alpha \sin\beta \sqrt{\frac{S^3 \cos^3\beta}{\pi^3 \cos^2\beta}} = \frac{1}{3} \sin 2\alpha \sin\beta \sqrt{\frac{S^3 \cos\beta}{\pi^3}}.$$

Введение вспомогательного отрезка с последующим нахождением его длины.

Введением вспомогательного отрезка пользуются, например, при решении таких задач, в которых данные линейные величины и углы не входят в один треугольник. Решение таких задач способом введения вспомогательного отрезка сводится к тому, что составляют уравнение для нахождения одного из неизвестных отрезков (вспомогательного отрезка), который легко связывается с данными элементами; искомую величину определяют при помощи найденного отрезка.

Относительно составления самих уравнений мы даем учащимся такие указания.

На чертеже следует найти такой отрезок (или два равных между собой отрезка), который можно выразить двумя разными способами (чаще всего из двух треугольников) через введенный вспомогательный отрезок и данные величины; затем эти выражения сравнить. Если этим способом не удается составить уравнение, то следует искать геометрические связи между элементами фигуры (теорема Пифагора; подобие; отрезок, равный сумме или разности двух других отрезков, и т. п.), и в соотношение, установленное такой связью, подставить величины, выраженные через введенный отрезок и данные величины.



Черт. 31.

Задача 13. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, угол β. Определить боковую поверхность цилиндра (черт. 31).

Р е ш е н и е. Из чертежа видно, что данная сторона b и углы α и β не находятся в одном треугольнике, а диаго-

наль B_1D легко связывается с обоими данными углами, поэтому именно ее и примем за вспомогательный отрезок. Обозначив $B_1D = x$, легко выразить боковую поверхность цилиндра через x и функции углов α и β. Действительно, из треугольника BB_1D можно найти высоту и диаметр основания цилиндра: $BB_1 = B_1D \cdot \sin\alpha = x\sin\alpha$;

$BD = B_1D \cdot \cos\alpha = x\cos\alpha$. Отсюда

$$S_б = \pi BD \cdot BB_1 = \pi x^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\pi}{2} x^2 \sin 2\alpha.$$

Теперь составляем уравнение для нахождения x.

Если стороны AB и BD прямоугольного треугольника ABD выразить через x и известные углы, то можно будет найти x, так как сторона AD известна. Действительно: $AB = A_1B_1 = B_1D\sin\beta = x\sin\beta$; $BD = x\cos\alpha$ и так как $BD^2 - AB^2 = AD^2$, то $x^2\cos^2\alpha - x^2\sin^2\beta = b^2$, откуда $x^2 = \dfrac{b^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$ (так как данная сторона AD входит и в прямоугольный треугольник A_1AD, то можно также выразить через x стороны AA_1 и A_1D этого треугольника: $AA_1 = x\sin\alpha$; $A_1D = x\cos\beta$ и воспользоваться соотношением $A_1D^2 - A_1A^2 = AD^2$).

Теперь находим боковую поверхность:

$$S_б = \frac{\pi b^2 \sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

Очевидно, что предварительное выражение искомой величины через x (в нашей задаче – боковой поверхности) не обязательно, это можно сделать и после нахождения x.

2) Введение вспомогательного угла.

Этот способ решения геометрических задач применяется в тех же случаях, что и способ введения вспомогательного отрезка, а именно тогда, когда данный линейный элемент не входит ни в один из треугольников, содержащих данные углы. Кроме того, введение вспомогательного угла в значительной мере облегчает решение задач и во многих других случаях.

К сожалению, способ введения вспомогательного угла еще мало применяется в работе школ и недостаточно популяризируется в учебной и методической литературе, меж-

ду тем этот способ имеет много достоинств. Достаточно сказать, что, пользуясь введением вспомогательного угла, можно многие задачи на шары, описанные около правильных пирамид, свести к одной задаче — нахождению угла наклона бокового ребра к основанию, а задачи на шары, вписанные в правильные пирамиды, — к нахождению двугранного угла при основании пирамиды.

Впервые с методом введения вспомогательного угла мы знакомим учащихся в четвертой четверти учебного года в IX классе при решении стереометрических задач на установление зависимостей между различными элементами правильных пирамид и призм. Такие задачи имеются в сборниках задач по тригонометрии П. В. Стратилатова, А. И. и Н. И. Худобиных, Р. Н. Позойского.

Способ введения вспомогательного угла дается учащимся нелегко и поэтому мы придерживаемся принципа постепенности как в сложности задач, так и в подробности их решения.

Вначале у учащихся вызывает некоторые трудности выбор вспомогательного угла и тех треугольников, которые связывают данные углы и искомый. Поэтому, начиная изучать этот метод, мы советуем учащимся разыскать такой линейный элемент данного тела, который входит одновременно и в треугольник, содержащий искомый угол, и в треугольник, содержащий данный угол (этот элемент не должен находиться на основании многогранника), и определить его через указанные углы и сторону основания данного многогранника.

Задача 14. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Высота пирамиды H. Найти площадь основания пирамиды.

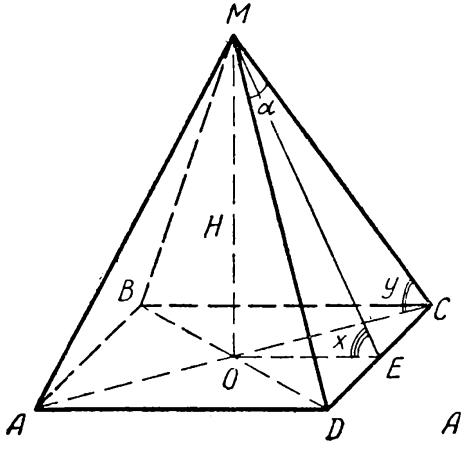
Решение. Эту задачу можно решить введением вспомогательного отрезка (стороны основания или бокового ребра), но это приводит к довольно громоздким преобразованиям.

Между тем эта задача решается значительно проще способом введения вспомогательного угла. Мы обращаем внимание учащихся на то, что если бы был известен угол x наклона боковой грани к основанию или угол y наклона бокового ребра к основанию, то дальнейшее решение задачи уже не вызвало бы никаких трудностей. Попытаемся

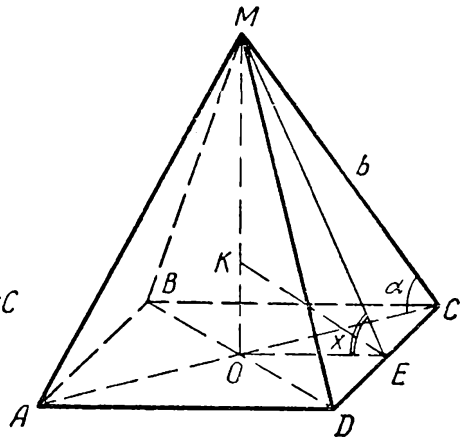
определить какой-либо из этих углов, например угол x (черт. 32).

Апофема ME есть биссектриса плоского угла при вершине, поэтому $\angle EMC = \frac{\alpha}{2}$.

Рассматривая треугольники OME и EMC, замечаем, что первый из них содержит искомый угол x, а второй—



Черт. 32.



Черт. 33.

известный угол $\frac{\alpha}{2}$ и имеют общую сторону ME. Из этих треугольников определяем сторону ME, выразив ее через отрезки основания. Из $\triangle OME$ имеем: $ME = \frac{OE}{\cos x}$; из $\triangle EMC$ имеем: $ME = EC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $\frac{OE}{\cos x} = EC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а так как $OE = EC = \frac{CD}{2}$, то $\frac{1}{\cos x} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, откуда $\cos x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Теперь из треугольника OME находим: $OE = OM \cdot \operatorname{ctg} x = H \operatorname{ctg} x$, площадь основания

$$S = 4H^2 \operatorname{ctg}^2 x, \text{ где } \cos x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Обычно ответ к этой задаче мы оставляем в таком виде, так как вычисления по этим равенствам очень простые.

Однако можно получить ответ, выраженный и через данный угол α:

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos \alpha},$$

тогда площадь основания $S = 4H^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sec \alpha$. Учитывая, что угол x является острым, ответ можно дать и в таком виде:

$$S = 4H^2 \operatorname{ctg}^2 \left[\arccos\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Задача 15. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. Найти объем шара, вписанного в пирамиду (черт. 33).

Р е ш е н и е. В данной правильной пирамиде центр вписанного шара находится в точке пересечения высоты MO пирамиды с биссектрисой EK линейного угла MEO, а отрезок KO есть радиус шара.

Теперь учащиеся легко сообразят, что для решения задачи достаточно знать угол x наклона боковых граней к основанию. Найдем этот угол.

У прямоугольных треугольников OMC и OME имеется общая сторона MO, определим ее. Из $\triangle OMC$ находим: $MO = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Из $\triangle OME$ имеем: $MO = OE \cdot \operatorname{tg} x$, следовательно, $OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = OE \cdot \operatorname{tg} x$. Но $OC = OE\sqrt{2}$, поэтому $OE\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha = OE \cdot \operatorname{tg} x$, откуда $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Теперь находим радиус шара:

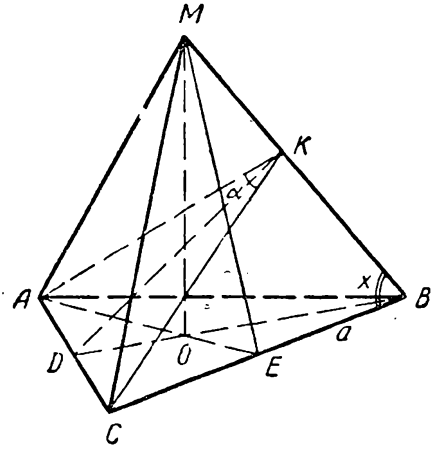
$$KO = OE \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{OC}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{b^3 \cos^3 \alpha}{2\sqrt{2}} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi b^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2},$$

где $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Задача 16. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а угол между боковыми гранями α. Найти боковую поверхность пирамиды (черт. 34)).



Черт. 34.

Р е ш е н и е. Нетрудно заметить, что задачу легко будет решить, если мы найдем плоский угол x боковой грани. Найдем этот угол. Проводим $CK \perp MB$; соединив точки A и K, мы найдем, что $\triangle CBK = \triangle ABK$, так как $CB = AB$; BK — общая сторона этих треугольников и $\angle CBK = \angle ABK$; следовательно, $\angle AKB = \angle CKB$ и $AK \perp KB$, кроме того, $AK = CK$, а $\angle AKC = \alpha$.

Точка D — середина стороны AC, поэтому $DK \perp AC$ и $\angle AKD = \angle CKD = \frac{\alpha}{2}$.

Отрезок CK — общий для $\triangle DKC$ и $\triangle CKB$, поэтому определим сторону CK. Имеем: $CK = \dfrac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ и

$CK = CB \cdot \sin x = a \sin x$, следовательно, $a \sin x = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$,

откуда $\sin x = \dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Из $\triangle EMB$ находим: $ME = EB \operatorname{tg} x = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x$.

Выразим $\operatorname{tg} x$ через функции угла α:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 30\right)}}.$$

Искомая боковая поверхность

$$S_{\text{бок}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{3}{4} a^2 \operatorname{tg} x, \text{ где } \sin x = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

или

$$S_{\text{бок}} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right)}} =$$

$$= \frac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right)}}.$$

Задача 17. Высота правильной шестиугольной пирамиды h. Перпендикуляр, опущенный из центра описанного шара на боковую грань, образует с высотой угол α. Найти объем шара.

Р е ш е н и е. Чтобы найти центр O шара, описанного около данной правильной пирамиды, надо в плоскости MAP провести перпендикуляр KO к ребру AM, через середину K этого ребра до пересечения с высотой пирамиды в некоторой точке O (черт. 35); эта точка и будет центром шара.

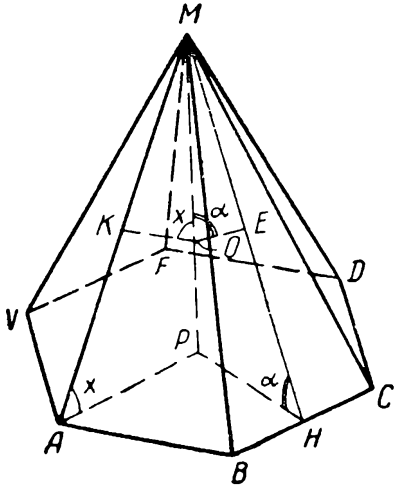
Так как $\angle MAP = \angle MOK = 90^\circ - \angle AMP$, то задачу легко будет решить, если будет известен угол x наклона бокового ребра к основанию пирамиды.

По построению OE есть перпендикуляр к боковой грани BMC, проведенный из центра описанного шара. Основание этого перпендикуляра находится на апофеме MH пирамиды, следовательно, $\angle MOE = \alpha$. Кроме того, $\angle MHP = 90^\circ - \angle PMH = \alpha$. Обозначим сторону основания через a, тогда $PH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AP = a$.

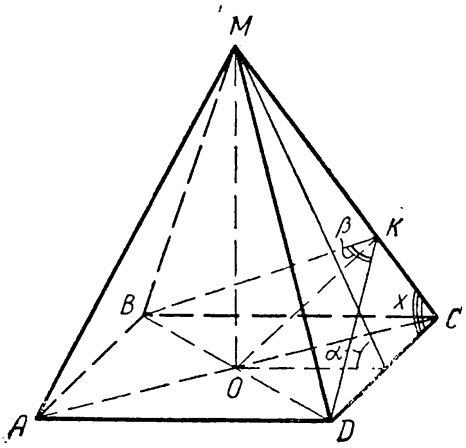
Из треугольника MPH имеем: $MP = PH \operatorname{tg}\alpha$, или $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Из треугольника MPA получаем:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{AP}{MP} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha.$$



Черт. 35.



Черт. 36.

Затем находим $AM = \frac{MP}{\sin x} = \frac{h}{\sin x}$, $MO = \frac{MK}{\sin x} = \frac{AM}{2\sin x} = \frac{h}{2\sin^2 x}$.

Искомый объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi MO^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{h^3}{8\sin^6 x} = \frac{\pi h^3}{6\sin^6 x}, \text{ где } \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Можно выразить объем и через данный угол α:

$$V = \frac{\pi h^3}{6}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{6}(1+\operatorname{ctg}^2 x)^3 = \frac{\pi h^3}{6}\left(1+\frac{4}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)^3 = \frac{\pi h^3}{162}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha)^3.$$

Задача 18. Доказать, что углы α и β, которые образует боковая грань правильной четырехугольной пирамиды с

плоскостью основания и со смежной боковой гранью, связаны соотношением: $\cos\alpha = \sqrt{-\cos\beta}$.

Р е ш е н и е. Несмотря на то что в этой задаче связываются угловые элементы, ее также удобно решить введением вспомогательного угла (черт. 36).

Угол α легко связывается с углом x наклона бокового ребра к стороне основания пирамиды, а угол x, в свою очередь, легко связывается с углом β, что и дает возможность решить задачу.

Когда учащиеся научатся находить вспомогательные углы способом, изложенным в предыдущей задаче, мы переходим к более короткому способу, на который мы уже указывали раньше (стр. 191).

Выразим угол α через x. Для нахождения тригонометрической функции угла α следует взять катет OE и гипотенузу ME, так как они входят в треугольники OEC и MEC, содержащие известные углы и имеющие общую сторону EC:

$$\cos\alpha = \frac{OE}{ME} = \frac{OE \cdot EC}{ME \cdot EC} = \frac{OE}{EC} \cdot \frac{EC}{ME} = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x.$$

Теперь выразим угол x через угол β. Для этого возьмем катет DK и гипотенузу DC треугольника DKC, так как они входят в треугольники ODK и ODC, содержащие известные углы и имеют общую сторону OD.

Имеем:

$$\sin x = \frac{DK}{DC} = \frac{DK \cdot OD}{DC \cdot OD} = \frac{DK}{OD} \cdot \frac{OD}{DC} = \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Далее находим:

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}} =$$

$$= \sqrt{2\sin^2\frac{\beta}{2} - 1} = \sqrt{-\cos\beta}.$$

Задача 19. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину, если радиус шара равен R.

Р е ш е н и е. Эта задача помещена в сборнике задач по тригонометрии Н. Рыбкина (§ 22, № 10), к которой дано такое указание: «Проведя из общей точки хорд еще диаметр и обозначив хорду через x, выразим расстояние от ее конца до диаметра: оно будет равно $x \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{cosec} 60°$. Проведя полуокружность большого круга, содержащую взятые диаметр и хорду, и соединив конец хорды с другим концом диаметра, составим уравнение:

$$x\sqrt{4R^2 - x^2} = 2Rx \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{cosec} 60°».$$

Опыт показывает, что учащиеся испытывают значительные трудности, разбираясь в этих указаниях и выполняя достаточно сложные преобразования.

Между тем задача легко решается введением вспомогательного угла. Действительно, рассматривая данные хорды PA, PB и PC (черт. 37) как боковые ребра треугольной пирамиды, основанием которой служит треугольник ABC, замечаем, что эта пирамида будет правильной ($AB=BC=AC$ и высота пирамиды проектируется в центр K основания). Если через точку M — середину бокового ребра AP проведем $MO \perp AP$ в плоскости APK, то точка O пересечения MO с PK будет центром описанного шара, $OP=R$.

Обозначим $\angle APK = \angle MPO = x$.

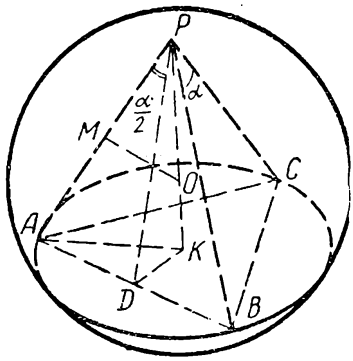
Рассуждая, как в предыдущей задаче, приходим к выводу, что для нахождения угла x из треугольника APK, целесообразно взять стороны AK и AP, так как они входят в треугольники AKD и APD, содержащие известные углы и имеющие общую сторону AD:

$$\sin x = \frac{AK}{AP} = \frac{AK \cdot AD}{AP \cdot AD} = \frac{AK}{AD} \cdot \frac{AD}{AP} = \frac{1}{\cos 30°} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} =$$

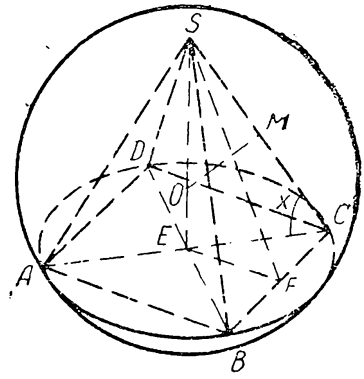
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Для нахождения угла x можно было также и здесь воспользоваться соотношением, полученным на стр. 191. Дей-

ствительно, PA — наклонная к плоскости ABC, AK — ее проекция на эту плоскость, AD — прямая, проведенная на плоскости, $\angle PAK = 90° - x$; $\angle PAD = 90° - \frac{\alpha}{2}$; $\angle KAD = 30°$, следовательно, $\cos(90° - x) = \frac{\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos 30°}$, или $\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\alpha}{2}$. Теперь находим хорду AP. Из треугольника MPO имеем: $MP = PO\cos x = R\cos x$, и искомая длина хорды $AP = 2R\cos x$.



Черт. 37.



Черт. 38.

Выразим длину хорды через данный угол α:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Подкоренное выражение можно преобразовать к виду $\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (см. стр. 41), или $4\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Окончательно находим:

$$AP = \frac{2R}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Задача 20. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен α. Определить объем и полную поверхность пирамиды.

Р е ш е н и е. В книге П. Я. Кожеурова «Курс тригонометрии для техникумов» (1959 г.) помещено следующее решение этой задачи (стр. 269—272): «Дано: $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, вписанная в шар (черт. 38); $\angle BSC = \angle CSD = \ldots = \alpha$; $OS = R$ — радиус шара. Требуется найти объем V и поверхность S пирамиды.

Имеем: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot H$, где $H = SE$ — высота пирамиды.

Определим высоту H. Для этого проведем SF — апофему пирамиды и EF — апофему ее основания. Тогда $\angle BSF = \frac{\alpha}{2}$; из треугольника SFE выражаем искомую высоту H:

$$H^2 = SF^2 - EF^2. \tag{1}$$

Но $$EF = BF = SB \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

где l есть SB;

$$SF = SB \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = l\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

На основании равенств (2) и (3) равенство (1) примет вид $H^2 = l^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, или $H^2 = l^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$,

или

$$H^2 = l^2\cos\alpha. \tag{4}$$

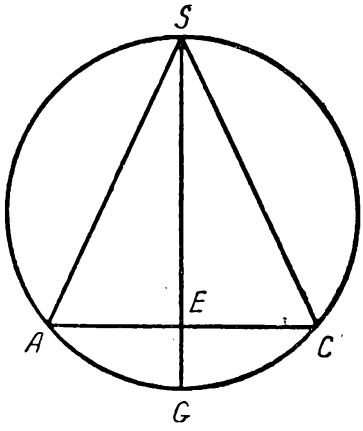
Изобразим отдельно сечение шара плоскостью, проходящей через диагональ AC основания пирамиды и высоту ее SE (черт. 39).

На основании известной теоремы о пропорциональных отрезках в круге имеем:

$SA^2 = SG \cdot SE$,

или

$$l^2 = 2RH. \qquad (5)$$



Черт. 39.

Подставляя найденное выражение для l^2 в равенство (4), получим:

$$H^2 = 2RH\cos\alpha, \qquad (6)$$

откуда

$$H = 2R\cos\alpha. \qquad (7)$$

Второе значение $H = 0$ не рассматриваем, так как по смыслу задачи $H \neq 0$.

Определяем S_{ABCD} — площадь основания пирамиды: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$, где r — радиус круга, описанного около $ABCD$.

Из прямоугольного треугольника SEC имеем:

$$r^2 = l^2 - H^2.$$

На основании равенств (5) и (6) r^2 выразится так:

$$r^2 = 2RH - 2RH\cos\alpha,$$

или $$r^2 = 2RH\,(1 - \cos\alpha) = 4\,RH\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Если H заменим его значением из равенства (7), то получим:

$$r^2 = 8R^2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (8)$$

После этого находим, что

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 8R^2\cos\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = 16R^2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (9)$$

а $V = \frac{1}{3} \cdot 16R^2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot 2R\cos\alpha = \frac{32}{3} R^3\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Искомая поверхность S пирамиды ссстоит из $S_{бок}$ — боковой поверхности и S_{ABCD} — площади основания: $S = S_{бок} + S_{ABCD}$; $S_{бок}$ равна учетверенной площади боковой грани пирамиды:

$$S_{бок} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \sin\alpha = 2l^2 \sin\alpha.$$

Из равенств (5) и (7) следует, что

$$l^2 = 2RH = 2R \cdot 2R\cos\alpha = 4R^2\cos\alpha.$$

На основании этого получим:

$$S_{бок} = 2 \cdot 4R^2 \cos\alpha \sin\alpha = 8R^2 \sin\alpha\cos\alpha. \qquad (10)$$

Складывая выражения (10) и (9) для $S_{бок}$ и S_{ABCD}, находим S:

$$S = 8R^2 \sin\alpha\cos\alpha + 16R^2\cos\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = 16R^2\cos\alpha \times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\sin\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 16R^2\cos\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 16R^2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 32R^2\sin 45^\circ\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).»$$

Теперь решим эту же задачу введением вспомогательного угла.

Когда учащиеся уже усвоили сущность этого метода и научились им пользоваться, нет необходимости рассматривать треугольники, содержащие общий элемент, как это мы делали раньше. Процесс разыскания вспомогательного угла можно тогда сократить, рассуждая примерно так.

Центр шара находится в точке O пересечения высоты SO пирамиды с перпендикуляром OM к ребру SC, проходящим через середину M этого ребра; следовательно, $SO = R$ и $SM = \frac{1}{2}SC$. Если определить $\angle SCE = \angle SOM = x$, то дальше легко найти нужные элементы пирамиды.

Так как SC — наклонная к плоскости $ABCD$, EC — проекция наклонной на эту плоскость, CF — прямая, проведенная на этой плоскости, $\angle SCE = x$, $\angle SCF = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle ECF = 45^\circ$, то $\cos x = \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Из треугольника SOM имеем: $SM = SO \cdot \sin x = R \sin x$. Теперь из треугольника SEC находим:

$$SE = SC \cdot \sin x = 2 \cdot SM \cdot \sin x = 2R \sin^2 x;$$

$$EC = SC \cdot \cos x = 2R \sin x \cos x,$$

следовательно, $BC = EC \cdot \sqrt{2} = 2R\sqrt{2} \sin x \cos x$.

Далее имеем:

$$V = \frac{1}{3} BC^2 \cdot SE = \frac{1}{3} \cdot 8R^2 \sin^2 x \cos^2 x \cdot 2R \sin^2 x =$$

$$= \frac{16}{3} R^3 \sin^4 x \cos^2 x.$$

Из равенства $\cos x = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ находим:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha,$$

и искомый объем

$$V = \frac{16}{3} R^3 \cos^2 \alpha \, 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{32}{3} R^3 \cos^2 \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Боковую поверхность можно вычислить так:

$$S_{\text{бок}} = 4S_{\triangle BSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SB \cdot \sin \alpha =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin^2 x \cdot \sin \alpha = 8R^2 \sin^2 x \sin \alpha.$$

Площадь основания $S_{\text{осн}} = BC^2 = 8R^2 \sin^2 x \cos^2 x$, находим полную поверхность:

$$S = 8R^2 \sin^2 x (\sin \alpha + \cos^2 x) = 8R^2 \sin^2 x \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 16R^2 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}\right) =$$

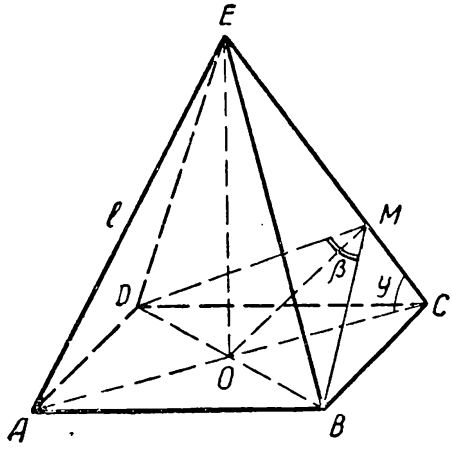
$$= 32R^2 \sin 45^\circ \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 21. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен β.

Р е ш е н и е. В сборнике задач по элементарной математике Н. П. Антонова, М. Я. Выгодского, В. В. Ники-

тина и А. И. Санкина (Москва, 1960 г.) помещено следующее решение этой задачи (№ 688, стр. 402—403):

«Проводим высоту OM треугольника OCE (черт. 40), тогда $\angle BMD = \beta$ (доказать!). Обозначим $OC = OB$ через x и найдем x из формулы $OC^2 = CE \cdot CM$, где $CE = l$ и $CM = \sqrt{x^2 - OM^2}$. Из треугольника OMB находим $OM = OB \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = x \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, так что



Черт. 40.

$$CM = x\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Подставляя в формулу $OC^2 = CE \cdot CM$, получаем уравнение

$$x^2 = lx\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Корень $x = 0$, очевидно, не соответствует условию, так что имеем

$$x = OC = l\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно,

$$H = \sqrt{CE^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{l^2 - l^2\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\right)} =$$

$$= l\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Затем вычисляем объем:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 H = \frac{1}{3} \cdot 2l^2 \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}\right) \cdot l \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{2}{3} l^3 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} = -\frac{2}{3} l^3 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \cos \beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

В сборнике задач по математике К. У. Шахно (Учпедгиз, 1956 г.) имеется аналогичная задача (№ 488) и в указании к ней предлагается рассмотреть подобные треугольники, что приводит к такому же решению.

Найдем числовую величину объема пирамиды по следующим данным:

$$\beta = 100°24'; \quad l = 19{,}78.$$

Имеем:

$$V = -\frac{2}{3} \cdot 19{,}78^3 \cdot \frac{\operatorname{ctg} 50° 12' \cdot \cos 100° 24'}{\sin^2 50° 12'} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 19{,}78^3 \cdot \frac{\operatorname{ctg} 50° 12' \cdot \sin 10° 24'}{\sin^2 50° 12'}.$$

$$\lg V = \lg 2 - \lg 3 + 3 \lg 19{,}78 + \lg \operatorname{ctg} 50° 12' + \lg \sin 10° 24' - 2 \lg \sin 50° 12'.$$

$$\begin{aligned}
\lg 2 &= 0{,}3010 &&= 0{,}3010 &&= 0{,}3010 \\
-\lg 3 &= -0{,}4771 &&= \bar{1}{,}5229 &&= \bar{1}{,}5229 \\
3 \lg 19{,}78 &= 3 \cdot 1{,}2962 &&= 3{,}8886 &&= 3{,}8886 \\
\lg \operatorname{ctg} 50° 12' &= \bar{1}{,}9207 &&= \bar{1}{,}9207 &&= \bar{1}{,}9207 \\
\lg \sin 10° 24' &= \bar{1}{,}2565 &&= \bar{1}{,}2565 &&= \bar{1}{,}2565 \\
-2 \lg \sin 50° 12' &= -2 \cdot \bar{1}{,}8855 &&= 2 \cdot 0{,}1145 &&= 0{,}2290
\end{aligned}$$

$$\lg V = 3{,}1187; \quad V = 1314.$$

Теперь решим эту задачу, пользуясь введением вспомогательного угла. С этой целью обозначим $\angle ECO = y$.

Имеем:

$$\sin y = \frac{OM}{OC} = \frac{CM}{OC} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{OM}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

Далее находим:

$$OC = EC \cdot \cos y = l \cos y; \quad EO = EC \cdot \sin y = l \sin y.$$

Искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot OC^2 \cdot EO = \frac{2}{3} l^2 \cos^2 y \cdot l \sin y = \frac{l^3}{3} \sin 2y \cos y,$$

где $\sin y = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

Вычисления: $\sin y = \operatorname{ctg} 50° 12' = 0{,}8332; \quad y = 56°26'.$

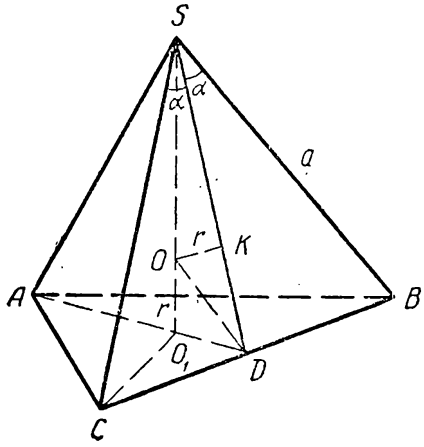
$$V = \frac{19{,}78^3}{3} \cdot \sin 112° 52' \cos 56° 26' =$$

$$= \frac{19{,}78^3}{3} \cdot \cos 22° 52' \cos 56° 26'.$$

$$\lg V = 3 \lg 19{,}78 - \lg 3 + \lg \cos 22° 51' + \lg \cos 56° 26'.$$

$$3 \lg 19{,}78 = 3 \cdot 1{,}2962 = 3{,}8886$$
$$-\lg 3 = -0{,}4771 = \bar{1}{,}5229$$
$$\lg \cos 22° 52' = \bar{1}{,}9644 = \bar{1}{,}9644$$
$$\lg \cos 56° 26' = \bar{1}{,}7426 = \bar{1}{,}7426$$
$$\lg V = 3{,}1186; \quad V = 1314.$$

Как видим, введение вспомогательного угла не только значительно упрощает решение задачи, совершенно освобождая от преобразований тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования, но также упрощает и вычисления. Этот же пример показывает, что при решении задач введением вспомогательного угла нет необходимости окончательный ответ выражать обязательно через заданные в условии задачи параметры, и мы это делали в других задачах только с той целью, чтобы получить ответ, указанный в книге, из которой взята задача.



Черт. 41.

Задача 22. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, а плоский угол при вершине равен 2α. Найти поверхность шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение. Эта задача имеется в книге «Задачи по математике и физике, дававшиеся на приемных испытаниях в 1957 году», изданной Московским физико-техничес-

ким институтом (1959 г.). Там же помещено следующее решение этой задачи (стр. 18—20);

«Введем обозначения (черт. 41): $H = SO_1$ — высота пирамиды, $k = SD$ — апофема, r — радиус вписанного шара, $S_ш$ — площадь поверхности шара. Рассмотрим теперь треугольники SCD, O_1DC и O_1SD. Так как пирамида правильная, имеем:

из $\triangle SCD$: $\quad k = a\cos\alpha,\ CD = a\sin\alpha;$

из $\triangle O_1DC$: $\quad O_1D = CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}a\sin\alpha;$

из $\triangle O_1SD$: $\quad H = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - \frac{1}{3}a^2\sin^2\alpha} =$

$$= \frac{a}{3}\sqrt{9\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha};$$

из $\triangle O_1SD$: $\frac{O_1D}{SD} = \frac{O_1O}{OS}$ (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника), т. е. $\frac{\sqrt{3}a\sin\alpha}{3a\cos\alpha} = \frac{r}{H-r}$.

Проведем последовательно простые преобразования:

$$\sqrt{3}\,H\sin\alpha - \sqrt{3}r\sin\alpha = 3r\cos\alpha;\ H\sqrt{3}\sin\alpha =$$
$$= r(\sqrt{3}\sin\alpha + 3\cos\alpha);$$

$$r = \frac{H\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha + 3\cos\alpha} = \frac{a}{3}\frac{\sqrt{3}\sqrt{9\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha}\sin\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha + 3\cos\alpha} =$$
$$= \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)(3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)}}{\sqrt{3}\sin\alpha + 3\cos\alpha} =$$
$$= \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}}.$$

Окончательно получаем:

$$S_{ш} = 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^2 \frac{\sin^2\alpha \ \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

Теперь решим задачу введением вспомогательного угла. Определяем $\angle SDO_1 = 2x$. Имеем:

$$\cos 2x = \frac{O_1D}{SD} = \frac{O_1D \cdot CD}{SD \cdot CD} = \frac{O_1D}{CD} \cdot \frac{CD}{SD} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Из ΔSCD: $CD = a\sin\alpha$;

Из ΔO_1DC: $O_1D = CD \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}}$;

Из ΔOO_1D: $r = OO_1 = O_1D \cdot \operatorname{tg} x = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x.$

Поверхность шара

$$S_{ш} = 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^2 \sin^2\alpha \ \operatorname{tg}^2 x = \frac{4}{3}\pi a^2 \sin^2\alpha \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^2 \sin^2\alpha \frac{1 - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^2 \sin^2\alpha \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha} = \frac{4}{3}\pi a^2 \frac{\sin^2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}.$$

Последние четыре задачи, взятые нами из широко распространенной учебной и методической литературы, ясно показывают, что способ введения вспомогательного угла еще не получил должного распространения.

Если просмотреть ответы к задачам в задачниках, изданных в последние годы в качестве пособий для учителей средней школы, а именно Р. И. Позойского и А. И. и Н. И. Худобиных (второе издание, 1955 г.), то можно отметить следующее: только к 9 задачам из 346 в задачнике Худобиных (№ 1671, 1786, 1843, 1882, 1889, 1938, 1939, 1966,

1982) и только к 5 задачам из 105 в задачнике Позойского (№ 75, 77, 88, 92, 105) ответы даются в форме, приведенной нами выше (например, $V = a^3 \sin\alpha \operatorname{tg} x$, где $\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$)*.

Если авторы полагают, что только эти задачи следует решать введением вспомогательного угла, то это очень печально. Если же они считают, что и другие задачи следует решать введением вспомогательного угла, но ответы к ним выражать через заданные параметры, то, во-первых, это совершенно бесполезная работа, во-вторых, непонятно, почему к одним задачам ответы даются в одном виде, а к другим задачам, решаемым тем же методом, ответы даются в другом виде, и, в-третьих, это может просто дезориентировать читателей.

Почему же способ введения вспомогательного угла, дающий возможность сберечь много времени при решении большинства стереометрических задач, еще не нашел должного распространения в учебной и методической литературе?

Мы полагаем, что это является следствием некоторых распространенных заблуждений относительно этого метода.

Иногда считают, что существуют задачи, решение которых введением вспомогательного отрезка проще, чем введением вспомогательного угла. В своей практике мы таких задач не встречали. Не только в задачах, типичных для задач, решаемых введением вспомогательного угла, применение этого способа дает наиболее рациональное решение, но, как не трудно убедиться, и в задачах, типичных для задач, решаемых введением вспомогательного отрезка, удачный выбор вспомогательного угла дает наиболее простое решение. В этом легко убедиться, если сравнить решения следующих трех задач с помещенными ранее решениями этих задач, выполненными без введения вспомогательного угла (стр. 187, 188, 201).

Задача 23. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, угол β. Определить боковую поверхность цилиндра.

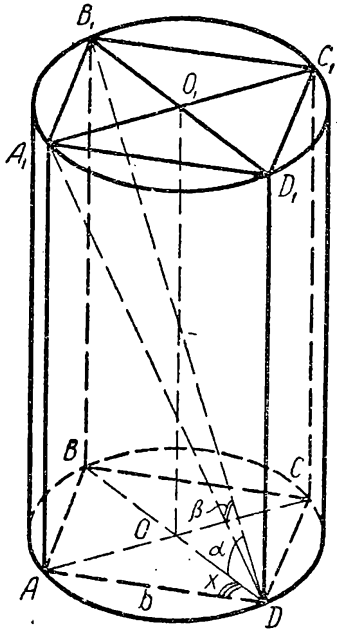
---

* В задачнике П. В. Стратилатова таких ответов совсем нет.

Р е ш е н и е. Задача сводится к нахождению диагонали основания BD и высоты BB_1 (черт. 42) данного параллелепипеда, так как искомая поверхность

$$S_{б.\,ц.} = \pi BD \cdot BB_1.$$

Искомые отрезки легко можно определить, если будет известен острый угол одного из прямоугольных треугольников, содержащих данную сторону b. Следовательно, в качестве вспомогательного угла можно взять любой из острых углов в треугольниках ABD и AA_1D. В неправильных призмах и пирамидах искомый вспомогательный угол обычно не удается выразить через один из данных углов; приходится использовать два из данных углов и более. При выборе сторон для нахождения вспомогательного угла руководствуемся теми же соображениями, что и в случае правильных призм и пирамид. Обозначая, например, $\angle ADB = x$ и замечая, что стороны $AB = A_1B_1$ и BD входят в треугольники A_1B_1D и BB_1D, содержащие данные углы и имеющие общую сторону B_1D, находим:



Черт. 42.

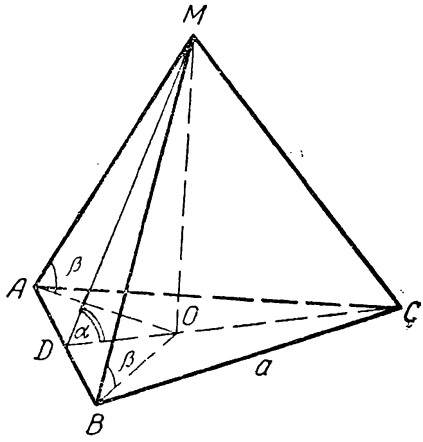
$$\sin x = \frac{AB}{BD} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1D}{BD \cdot B_1D} = \frac{A_1B_1}{B_1D} \cdot \frac{B_1D}{BD} = \sin\beta \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Можно также применить формулу, полученную на стр. 191. Так как B_1D — наклонная к плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$, B_1D_1 — проекция этой наклонной на плоскость, A_1B_1 — прямая, проведенная на этой плоскости, $\angle A_1B_1D_1 = 90° - x$, $\angle DB_1A_1 = 90° - \beta$, $\angle DB_1D_1 = \alpha$, то $\cos\alpha = \frac{\cos(90° - \beta)}{\cos(90° - x)}$ или $\cos\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin x}$, откуда $\sin x = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$.

Далее находим: $BD = \frac{b}{\cos x}$; $BB_1 = BD \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{b \operatorname{tg}\alpha}{\cos x}$;

$$S_{б.ц.} = \frac{\pi b^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos^2 x}, \quad \text{где } \sin x = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Задача 24. Основание пирамиды — правильный треугольник, сторона которого равна a. Два боковых ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные β, а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом α. Найти объем пирамиды (черт. 43).



Черт. 43.

Р е ш е н и е. Введение вспомогательного отрезка для решения этой задачи кажется наиболее естественным и простым, между тем введение вспомогательного угла и здесь дает более простое решение.

Из треугольника MDO можно найти высоту пирамиды, если известна гипотенуза MD. В свою очередь MD можно найти из треугольника MBD, если станет известным $\angle MBD = x$, так как $BD = \frac{a}{2}$. Найдем этот угол.

Имеем: $\sin x = \frac{MD}{MB} = \frac{MD}{MO} \cdot \frac{MO}{MB} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Можно найти этот угол и иначе. Не трудно доказать, что проекция наклонной MO на плоскость AMB лежит на прямой MD, а MB — прямая, проведенная на этой плоскости; так как $\angle OMD = 90° - \alpha$; $\angle OMB = 90° - \beta$;

$$\angle DMB = 90° - x, \text{ то } \cos(90° - \alpha) = \frac{\cos(90° - \beta)}{\cos(90° - x)},$$

$$\text{или } \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin x}, \quad \text{откуда } \sin x = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Теперь находим:

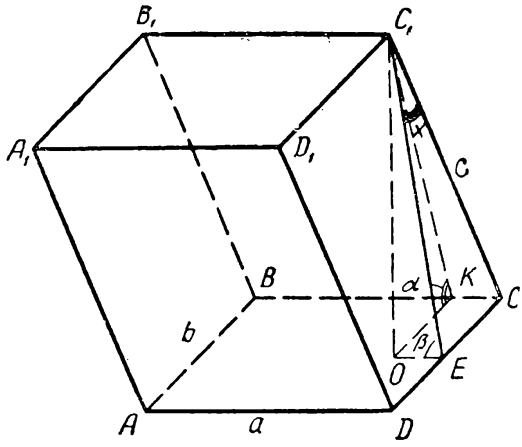
$$MD = DB \cdot \operatorname{tg} x = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x; \; MO = MD \cdot \sin\alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} x \sin\alpha.$$

Искомый объем

$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{tg}x\sin\alpha=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}\operatorname{tg}x\sin\alpha,$$

где $\sin x=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Задача 25. В основании наклонной призмы лежит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с основанием острые углы α и β. Боковое ребро равно c. Найти объем призмы (черт. 44).



Черт. 44.

Р е ш е н и е. Обозначим $\angle EC_1C=x$ и найдем этот угол. Имеем:

$$\operatorname{tg}x=\frac{EC}{EC_1}=\frac{OK}{EC_1}=\frac{OK}{C_1O}\times$$
$$\times\frac{C_1O}{EC_1}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\beta.$$

Далее находим:

$$C_1E=C_1C\cos x=c\cos x;$$
$$C_1O=C_1E\sin\beta=$$
$$=c\cdot\cos x\cdot\sin\beta.$$

Искомый объем $V=abc\cos x\sin\beta$, где $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta$.

Решая эту задачу без введения вспомогательного угла (стр. 188), мы получили для объема выражение:

$V=\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$ (такой же ответ к этой задаче дан и в задачнике Позойского; гл. IX, № 53).

Но это выражение для вычислений неудобно и требует его преобразования в произведение, что еще больше усложняет решение этой задачи.

Только что рассмотренные задачи отвергают и второе заблуждение относительно введения вспомогательного угла: будто бы этим способом можно решать только задачи с правильными пирамидами и призмами.

Наконец, иногда считают, что введение вспомогательного угла следует применять только в таких задачах,

в которых данный линейный элемент не входит ни в один из треугольников, содержащих данные углы. Задачи 15, 16 и 17 этого раздела показывают ошибочность и этого утверждения.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ, УПРОЩАЮЩИЕ РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

Мы рассмотрели основные способы решения стереометрических задач на вычисление.

Теперь мы переходим к рассмотрению некоторых приемов, которые мы применяем для упрощения решения стереометрических задач на вычисление.

По-видимому, эти приемы не исчерпывают все возможные упрощения при решении стереометрических задач и мы полагаем, что изучение и обобщение приемов таких упрощений путем обмена опытом может сыграть большую роль в деле усовершенствования преподавания стереометрии в школе.

Упрощения могут носить геометрический и алгебраический характер.

Упрощения геометрического характера обусловливаются удачным выбором положения данного тела, удачным выбором связей между его элементами, выполнением некоторых вспомогательных построений, удачным использованием некоторых теорем стереометрии и т. д.

Упрощения алгебраического характера возникают вследствие удачного выбора вспомогательных неизвестных, рационального выполнения вычислений и тригонометрических преобразований и т. д.

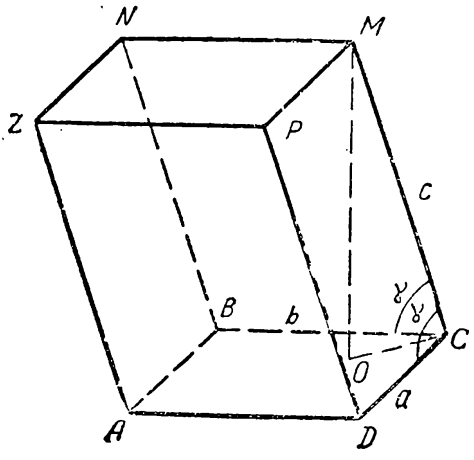
Выбор положения фигуры.

Рассматривая свойства параллелепипедов, мы обращаем внимание учащихся на такое очень важное их свойство: если принять за основание параллелепипеда какую-нибудь его грань, то полученное тело также будет параллелепипедом. То же самое относится и к треугольной пирамиде.

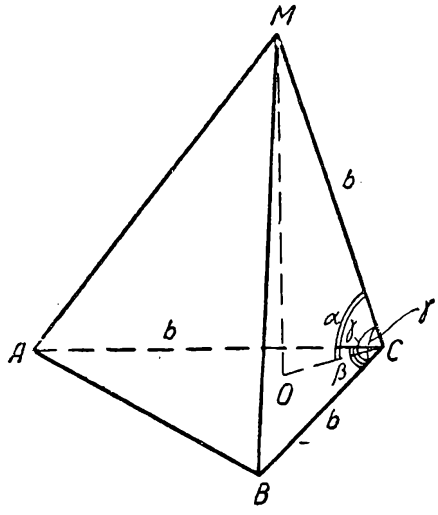
Это свойство можно использовать для упрощения решения некоторых задач: удачный выбор положения фигуры часто облегчает решение задачи.

Задача 1. В параллелепипеде длины трех ребер CD, CB и CM, выходящих из общей вершины C, соответственно равны a, b и c; ребра CD и CB взаимно перпендикулярны, а ребро CM образует с каждым из них угол γ. Определить объем параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Решение задачи значительно облегчается, если принять за основание параллелепипеда ту грань, которая содержит взаимно перпендикулярные ребра a и b (черт. 45).



Черт. 45.



Черт. 46.

Обозначим: $\angle MCO = x$. Для решения задачи воспользуемся зависимостью между углами, полученной на странице 191.

Обозначив $\angle OCD = \beta_1$ и $\angle OCB = \beta_2$, получим $\cos\gamma = \cos x \cos\beta_1$ и $\cos\gamma = \cos x \cos\beta_2$, откуда $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$ и $\beta_1 = \beta_2 = \frac{90°}{2} = 45°$.

Далее находим: $\cos x = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta_1} = \sqrt{2}\cos\gamma$.

Из треугольника MOC имеем:

$$MO = MC \cdot \sin x = c\sqrt{1-\cos^2 x} = c\sqrt{1-2\cos^2\gamma} =$$

$$= c\sqrt{-\cos 2\gamma}.$$

Искомый объем:

$$V = abc\sqrt{-\cos 2\gamma}.$$

Задача 2. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, равную b. Из плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны γ, а третий равен β. Найти объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Чаще всего эту задачу решают располагая данную пирамиду именно так, как это дано в условии задачи, так как тогда сразу определяется положение высоты: высота проектируется в центр описанного круга. Но не трудно убедиться, что решение задачи в этом случае требует сложных преобразований и учащиеся редко выполняют их без ошибок.

Между тем решение задачи становится несравненно проще, если за основание пирамиды принять ту боковую грань, плоский угол которой равен β (черт. 46). Если провести высоту пирамиды MO и обозначить $\angle ACO = \beta_1$ и $\angle BCO = \beta_2$, то, как и в предыдущей задаче, получим: $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\beta}{2}$.

Обозначив далее $\angle MCO = \alpha$, найдем: $\cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\beta}{2}}$;

$$MO = MC \cdot \sin\alpha = b\sqrt{1-\cos^2\alpha} = b\sqrt{1-\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\frac{\beta}{2}}} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\gamma} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}-\frac{1+\cos 2\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin\left(\gamma+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Площадь основания

$$S = \frac{1}{2} b^2 \sin\beta,$$

а искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b^2 \sin\beta \cdot \frac{b}{\cos\frac{\beta}{2}} \sqrt{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)} =$$

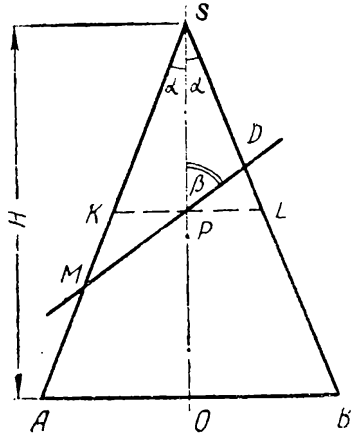
$$= \frac{1}{3} b^3 \sin\frac{\beta}{2} \sqrt{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Ответ можно дать и в более простой форме:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b^2 \sin\beta \, b \sin\alpha = \frac{1}{6} b^3 \sin\beta \sin\alpha, \text{ где } \cos\alpha = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Нахождение некоторых комбинаций неизвестных.

Формулы, по которым вычисляются искомые величины, содержат, обычно, некоторые комбинации известных и неизвестных (по условию задачи) величин (сумму, произведение и т. д.).



Черт. 47.

Именно поэтому иногда можно значительно упростить решение задачи, если вычислять не отдельные элементы, входящие в состав формул, а сразу нужные комбинации элементов, искать их как единое целое, а не по частям.

Рассмотрим, например, задачу, помещенную в задачнике А. И. и Н. И. Худобиных (№ 1858).

Задача 3. Высота конуса равна H, угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину высоты проведена прямая под углом β к ней и пересекающая боковую поверхность конуса в двух точках (черт. 47). Определить отрезок прямой, заключенный внутри конуса.

Р е ш е н и е. Эта же задача, но в несколько иной редакции, помещена в сборнике задач по тригонометрии Н. Рыбкина (§ 20, № 6). В ответе к этой задаче дано такое указание: «Искомый отрезок определяем по частям». Решим задачу согласно этому указанию.

В треугольнике SPD: $SP = \frac{H}{2}$; $\angle SDP = 180° - (\alpha+\beta)$.

По теореме синусов имеем: $\frac{PD}{SP} = \frac{\sin\alpha}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]}$,

откуда $PD = \frac{H\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

В треугольнике SPM: $\angle SMP = 180° - 2\alpha - [180° - (\alpha+\beta)] = -2\alpha + \alpha + \beta = \beta - \alpha$.

По теореме синусов имеем: $\frac{PM}{SP} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, откуда

$PM = \frac{H\sin\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)}$.

Находим длину всего отрезка: $MD = MP + PD =$

$$= \frac{H\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)} + \frac{H\sin\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)} = \frac{H\sin\alpha[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha+\beta)]}{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{H\sin\alpha\cdot 2\sin\beta\cos\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)} = \frac{H\sin\beta\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}.$$

Теперь решим задачу так, чтобы найти длину отрезка MD целиком.

Из треугольника PSD находим сторону SD по теореме синусов:

$$\frac{SD}{SP} = \frac{\sin\beta}{\sin[180° - (\alpha+\beta)]}, \text{ откуда } SD = \frac{H\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из треугольника MSD находим: $\frac{MD}{SD} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$,

откуда

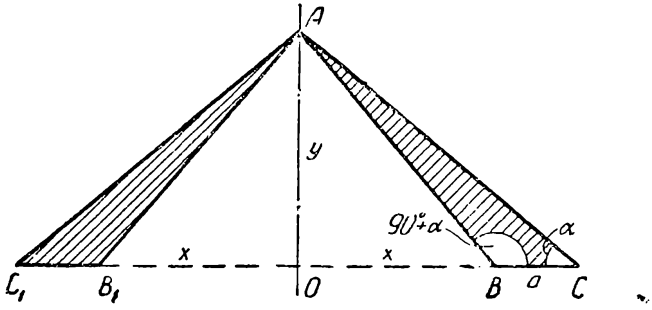
$$MD = \frac{SD\cdot\sin 2\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{H\sin\beta\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}.$$

Задача 4. В треугольнике даны основание a и прилежащие углы α и $90^\circ + \alpha$. Определить объем тела, полученного от вращения этого треугольника около его высоты (черт 48).

Р е ш е н и е. Искомый объем есть разность объемов двух конусов: конуса ACC_1 и конуса ABB_1. Обозначая их общую высоту через y и радиус OB через x, имеем

$$V = \frac{1}{3}\pi y\,(x+a)^2 - \frac{1}{3}\pi y x^2 = \frac{1}{3}\pi y\,(x^2 + 2ax + a^2 - x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi y\,(2ax + a^2) = \frac{1}{3}\pi y\,a\,(2x + a).$$



Черт. 48.

Таким образом, задача сводится к нахождению отрезков y и x. Но решение упрощается, если найти сразу отрезок $2x+a = CB_1$. Из треугольника ABC по теореме синусов находим:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ - 90^\circ - \alpha - \alpha)}, \text{ откуда } AC = \frac{a\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

В треугольнике AB_1C: $\angle AB_1O = \angle ABO = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$, $\angle B_1AC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha) = 90^\circ$, следовательно, $2x + a = CB_1 = \dfrac{AC}{\cos\alpha} = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha} = \dfrac{a}{\cos 2\alpha}$.

Из прямоугольного треугольника AOC имеем:

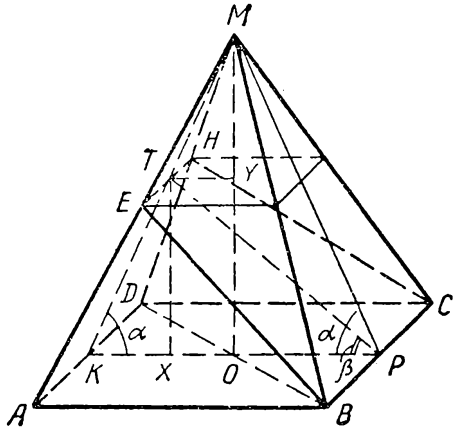
$$y = AC\sin\alpha = \frac{a\cos\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Искомый объем

$$V = \frac{1}{3}\pi a \frac{a\cos\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{6}\pi a^3 \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Через ребро этого двугранного угла проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.



Черт. 49.

Р е ш е н и е. Эта задача встречается в большинстве задачников и методических пособий, поэтому способы ее решения рассмотрим более подробно.

Первый способ. Этот способ приведен в книге С. И. Новоселова «Специальный курс тригонометрии» (§ 65, пример 4).

Заданное сечение есть равнобочная трапеция $BEHC$, TP — высота трапеции, MPK есть сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной ребру BC (черт. 49).

Имеем: $\angle MKP = \angle MPK = \alpha$; $\angle TPK = \beta$.

Искомая площадь сечения $S = \frac{1}{2} \cdot TP \cdot (BC + EH)$.

Из треугольника KTP по теореме синусов находим:

$$\frac{TP}{KP} = \frac{\sin\alpha}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}, \text{ откуда } TP = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Треугольники MAD и MEH подобны, следовательно,

$$\frac{EH}{AD} = \frac{MT}{MK}, \text{ откуда } EH = \frac{AD \cdot MT}{MK} = \frac{AD(MK - KT)}{MK}.$$

Из треугольника MKO имеем: $MK = \frac{KO}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Из треугольника KTP по теореме синусов находим:

$$\frac{KT}{KP} = \frac{\sin\beta}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}, \text{ откуда } KT = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Следовательно,

$$MK - KT = \frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha+\beta) - 2a\sin\beta\cos\alpha}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{a(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{a(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}.$$

Далее находим: $EH = \frac{a \cdot a \cdot \sin(\alpha-\beta) \cdot 2\cos\alpha}{2a\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Искомая площадь сечения:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\left[a + \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] =$$

$$= \frac{a^2\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Как видим, этот способ решения требует значительных вычислений и тригонометрических преобразований. Между тем такое решение приводится и в других пособиях (например, в книге К. У. Шахно «Сборник конкурсных задач по математике», Ленинград, 1953, № 502).

Второй способ. Предыдущее решение можно значительно упростить, если заметить, что в пропорции $\frac{EH}{AD} = \frac{MT}{MK}$ нет необходимости знать каждый из отрезков MT и MK, достаточно знать только их отношение. Если в отношении $\frac{MT}{MK}$ заменить отрезок MK равным ему отрезком MP, то получим отношение $\frac{MT}{MP}$ двух сторон треугольника TMP.

В этом треугольнике $\angle MTP$ является внешним относительно треугольника KTP и поэтому $\angle MTP = \alpha + \beta$, а $\angle MPT = \alpha - \beta$. По теореме синусов имеем:

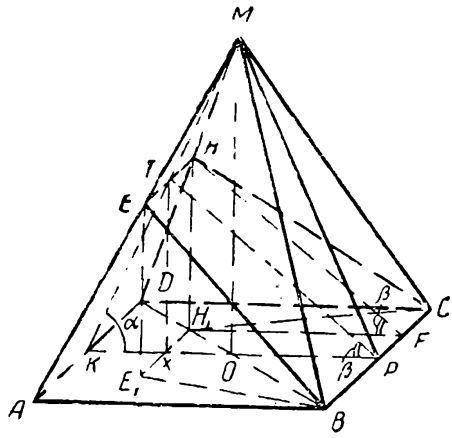
$\frac{MT}{MP} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, следовательно, $\frac{EH}{AD} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, откуда

$$EH = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Затем находим площадь сечения.

Третий способ. Решение этой задачи можно еще упростить, если находить среднюю линию трапеции не по частям, а целиком.

Так как $BP = OP$, то отрезок OP равен половине нижнего основания трапеции $BEHC$. Если провести плоскость



Черт. 50.

через прямую EH параллельно основанию пирамиды, то в сечении получим квадрат, в котором по аналогии будем иметь: $TY = ET$. Спроектировав отрезок TY на плоскость основания, получим отрезок $OX = TY = TE$ и поэтому $PX = BP + ET = \frac{1}{2}(BC + EH)$.

Из треугольника TPX находим: $PX = TP \cdot \cos\beta$, следовательно, площадь сечения $S = TP \cdot TP \cdot \cos\beta = TP^2 \cdot \cos\beta$. Из треугольника KTP определяем TP; $TP = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и окончательно получаем: $S = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

Четвертый способ. Можно доказать, что отрезок PX (черт. 50) равен средней линии трапеции $BEHC$ и без построения вспомогательного сечения, которое усложняет

чертеж. Для этого спроектируем отрезок TH на плоскость основания, тогда его проекция $XH_1 \parallel TH$ и $XH_1 = TH$. Но в прямоугольном треугольнике OXH_1 имеем $\angle XOH_1 = 45°$, поэтому $OX = XH_1 = TH$; следовательно, $TH + CP = XO + OP = XP = TP\cos\beta$ и площадь сечения

$$S = TP^2\cos\beta = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Пятый способ. Можно построить отрезок, равный средней линии трапеции непосредственно в самом сечении и найти его. Для этого проведем высоту HF (черт. 50) трапеции $BEHC$, тогда отрезок BF равен средней линии этой трапеции. Точка H_1 есть проекция точки H на плоскость основания; $H_1F \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах, следовательно, $\angle HFH_1 = \beta$ и $H_1F = HF\cos\beta = TP\cos\beta$. В прямоугольном треугольнике H_1FB $\angle H_1BF = 45°$, поэтому $BF = H_1F = TP\cos\beta$.

Искомая площадь сечения

$$S = TP\cdot BF = TP^2\cos\beta = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Шестой способ. Можно, наконец, найти сразу всю искомую площадь, если воспользоваться известным соотношением между площадью фигуры ($S_{сеч}$) и площадью ее проекции ($S_{пр}$) на какую-нибудь плоскость: $S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\beta}$, где β — угол между плоскостью фигуры и плоскостью проекции. Так как проекцией трапеции $BEHC$ служит трапеция BE_1H_1C, то задача сводится к нахождению площади последней. В трапеции BE_1H_1C диагонали ее BH_1 и E_1C взаимно перпендикулярны, поэтому высота ее XP равна средней линии и, следовательно, площадь этой трапеции $S_{пр} = PX^2$, а площадь сечения

$$S_{сеч} = \frac{PX^2}{\cos\beta} = \frac{TP^2\cos^2\beta}{\cos\beta} = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Использование зависимости между углом, образованным наклонной с плоскостью, и углами, образованными наклонной и ее проекцией с прямой на плоскости.

Ранее было установлено (стр. 191), что если x — угол наклонной с плоскостью, α — угол между наклонной и прямой на плоскости, β — угол между этой прямой и про-

екцией наклонной на плоскость, то имеет место соотношение:

$$\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Эту зависимость можно непосредственно использовать при решении многих задач, решаемых введением вспомогательного угла. Достаточно сказать, например, что из 14 задач в задачнике П. В. Стратилатова (§ 19, № 373—386) эту формулу можно успешно применить для решения по крайней мере 9 задач (№ 373—377, 378 (2), 381, 382, 385). Приведем два примера.

Задача 6. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними α. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней; угол между ними равен β. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Р е ш е н и е. И в задачнике Н. Рыбкина (§ 19, № 19), и в задачнике П. В. Стратилатова (№ 378 (2)) к этой задаче дан такой ответ:

$$\frac{4a^2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Этот ответ получается в том случае, когда непосредственно находятся неизвестные величины, определяющие боковую поверхность пирамиды. Применим для решения этой задачи рассматриваемую формулу.

Пусть AC_1 (черт. 51) — данная призма и $AC = AB = a$; $\angle CAB = \alpha$; $\angle CA_1B = \beta$. Проведем $AD \perp CB$, тогда $A_1D \perp CB$; $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$; $\angle CA_1D = \frac{\beta}{2}$. Из треугольника ACD имеем: $CD = a \sin \frac{\alpha}{2}$, следовательно, периметр основания

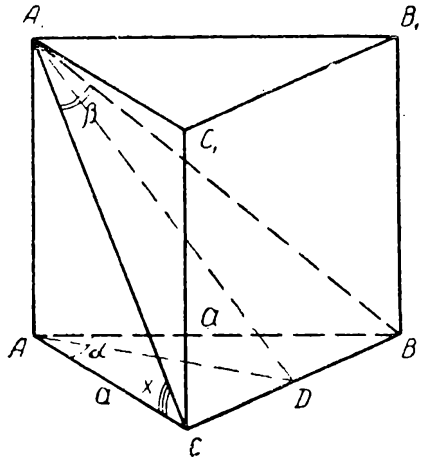
$$P = 2a + 2a \sin \frac{\alpha}{2} = 2a\left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ребро AA_1 легко найти из треугольника AA_1C, если известен угол ACA_1, который мы обозначим через x. Так

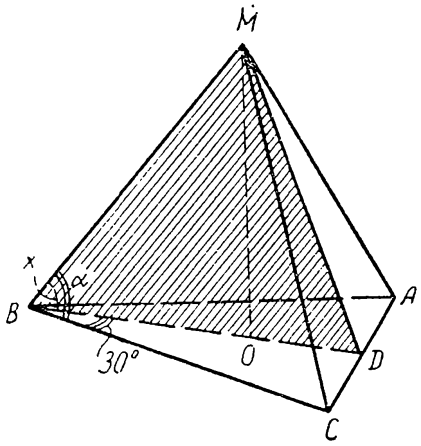
как $\angle A_1CD = 90° - \frac{\beta}{2}$; $\angle ACD = 90° - \frac{\alpha}{2}$, то на основании зависимости между углом наклонной с плоскостью и углами, образованными наклонной и ее проекцией с прямой на плоскости, находим:

$$\cos x = \frac{\cos\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь находим: $AA_1 = AC \cdot \operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} x$ и искомая площадь боковой поверхности $S = 2a^2\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg} x$, где $\cos x = \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.



Черт. 51.



Черт. 52.

Вычисления по этим формулам учащиеся выполняют быстрее и легче, чем по формуле, данной в задачнике Н. Рыбкина и П. В. Стратилатова.

Задача 7. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $MABC$ (черт. 52) — данная пирамида, MO — высота пирамиды, BD — высота треугольника

ABC. Так как $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то высоту MO пирамиды можно сразу найти, если известен $\angle MBO = x$. Угол x находим так же, как и в предыдущей задаче: $\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos 30°}$.

Следовательно, $MO = OB \cdot \operatorname{tg} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x$ и искомая площадь сечения

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot MO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} x,$$

где $\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos 30°}$.

В задачнике П. В. Стратилатова (№ 401) и в задачнике Н. Рыбкина (§ 19, № 14) к этой задаче дается такой ответ:

$$\frac{a^2}{4 \cos \alpha} \sqrt{\sin (\alpha - 30°) \sin (\alpha + 30°)}.$$

Применение вспомогательных построений.

Построение вспомогательных линий, фигур и сечений для упрощения решений стереометрических задач общеизвестно.

Мы хотим обратить внимание только на то, что очень важно научить учащихся сознательно искать эти построения, показать им, что эти построения возникают не случайно, а являются результатом определенных логических рассуждений.

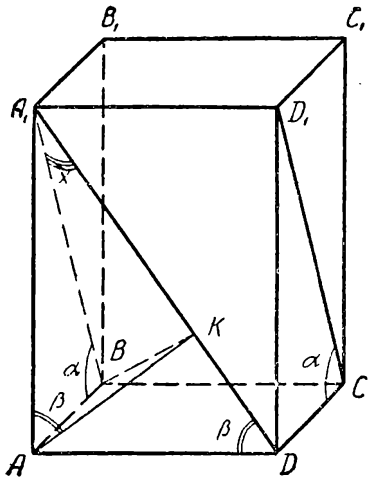
Задача 8. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол x между этими диагоналями.

Р е ш е н и е. Эта задача была решена нами способом введения вспомогательного отрезка. Но можно получить более простое решение, если выполнить несложное вспомогательное построение.

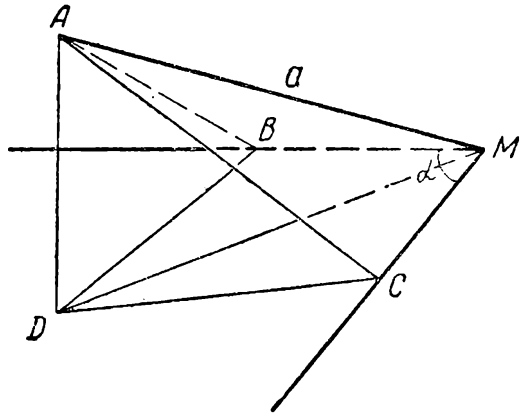
В задаче требуется установить связь между углами α, β и x. Таким образом, вспомогательное построение должно иметь целью связать между собой такие элементы, которые входят в треугольники, содержащие эти углы. Вполне естественно при этом стремиться получать прямоугольные

треугольники, так как в них зависимости между сторонами и углами выражаются наиболее просто.

Чтобы заключить угол x в прямоугольный треугольник, достаточно провести высоту в треугольнике BA_1D (черт. 53), поэтому проводим $BK \perp A_1D$ (можно было, разумеется, провести высоту и из вершины D). Соединив точки A и K, мы свяжем между собой элементы разных треугольников; нетрудно заметить, что получаемый при



Черт. 53.



Черт. 54.

этом треугольник AA_1K — прямоугольный. Действительно, BA есть перпендикуляр к плоскости AA_1D_1D, прямая BK — наклонная к этой плоскости, AK — проекция этой наклонной на плоскость и по построению $A_1D \perp BK$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $A_1D \perp AK$. Заметив, что $\angle A_1AK = 90° - \angle AA_1K = 90°-(90°-\beta)=\beta$, мы видим, что для нахождения угла x следует взять стороны A_1K и A_1B, так как они входят в треугольники AA_1K и AA_1B, содержащие известные углы и имеющие общую сторону AA_1; следовательно,

$$\cos x = \frac{A_1K}{A_1B} = \frac{A_1K}{A_1A} \cdot \frac{A_1A}{A_1B} = \sin\beta \sin\alpha.$$

Задача 9. В трехгранном углу $MABC$ дано: $\angle BMC = \alpha$; $\angle AMB = \angle AMC = 60°$; $MA = a$. Найти расстояние от точки A до плоскости BMC.

Р е ш е н и е. Искомое расстояние есть отрезок AD (черт. 54) перпендикуляра к плоскости BMC, опущенного из точки A.

Чтобы определить длину отрезка AD, надо включить его в какой-либо треугольник. Такой треугольник мы получим, если соединим отрезком прямой точки D и M. Но в треугольнике ADM известна гипотенуза AM, поэтому попытаемся определить отрезок DM. Единственным данным отрезком в условии задачи является отрезок AM, поэтому для нахождения отрезка DM необходимо использовать отрезок AM, для чего надо и этот отрезок заключить в треугольник. Дальше можно идти двумя путями.

1. Заключим отрезок AM в прямоугольный треугольник. С этой целью из точки A опустим перпендикуляр AC на сторону MC и соединим точки C и D отрезком прямой; по теореме о трех перпендикулярах $DC \perp MC$.

Однако решить задачу еще нельзя, так как неизвестно положение прямой DM на плоскости BMC. Совершенно очевидно, что положение прямой DM зависит от соотношения между углами AMB и AMC. Таким образом, чтобы использовать равенство этих углов, выполним построение, подобное предыдущему: проведем $AB \perp MB$ и соединим точки B и D отрезком прямой, тогда $BD \perp BM$.

Треугольники AMC и AMB равны между собой по общей гипотенузе AM и острому углу, равному 60°, поэтому $MC = MB = a\cos 60° = \frac{a}{2}$. Отсюда следует, что и $\triangle MDC = \triangle MDB$, так как они имеют общую гипотенузу MD и по равному катету, тогда $\angle DMC = \angle DMB = \frac{\alpha}{2}$.

Из треугольника CDM находим: $MD = \frac{MC}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$,

а из треугольника ADM имеем:

$$AD = \sqrt{AM^2 - DM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Доказав, что $\angle DMC = \angle DMB$, можно выполнить вычисления и при помощи вспомогательного угла. Обозначая $\angle AMD = x$, находим:

$$\cos x = \frac{DM}{AM} = \frac{DM}{CM} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

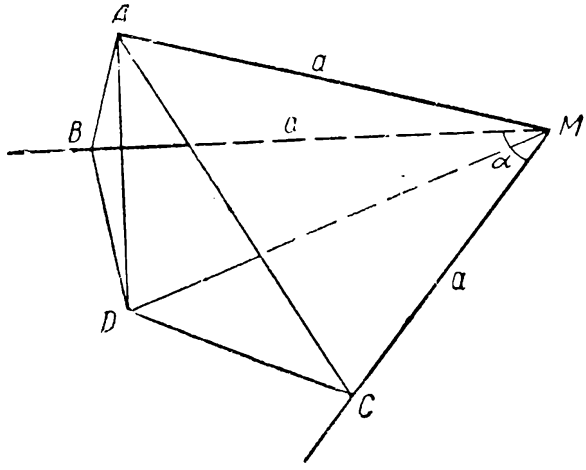
вательно,

$$AD = AM \cdot \sin x = a\sqrt{1 - \cos^2 x} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

2. Заключим отрезок AM в равносторонний треугольник.

Очевидно, что равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 60°, есть правильный треугольник, а правильные треугольники также очень удобны при решении задач на вычисление.



Черт. 55.

Эти рассуждения приводят к построению двух правильных треугольников AMB и AMC путем откладывания отрезков $MB = MC = MA = a$ и соединения соответствующих точек отрезками прямых (черт. 55).

Так как $AC = AB = AM$, то $\triangle ADC = \triangle ADB$, по общему катету AD и равным гипотенузам, следовательно, $CD = DB$. Отсюда $\triangle DMC = \triangle DMB$ по трем сторонам, ...му $\angle DMC = \angle DMB = \frac{\alpha}{2}$.

...ямоугольные треугольники ADC и ADM равны по ...ему катету AD и равным гипотенузам ($AC = AM$), ...едовательно, $DC = DM$ и $\angle DCM = \angle DMC = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle CDM = 180° - \alpha$. Из треугольника DMC по теореме ...нусов находим: $\frac{DM}{CM} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(180° - \alpha)}$, или $\frac{DM}{CM} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, откуда

$$DM = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Далее из треугольника ADM находим:

$$AD = \sqrt{AM^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2(\cos\alpha + 1) - 1} =$$

$$= \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30°\right)}.$$

Можно и в этом случае определить вспомогательный угол $x = \angle AMD$:

$$\cos x = \frac{DM}{AM} = \frac{DM}{CM} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

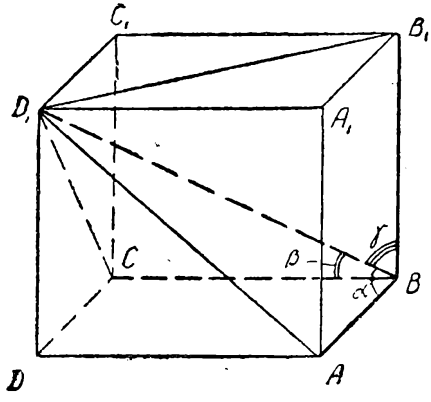
а затем найти искомый отрезок из равенства:

$$AD = AM \sin x = a\sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

При решении некоторых задач бывает весьма удобным и полезным достроить данную конфигурацию или тело до какой-либо известной конфигурации или тела. Так, например, при решении задач с усеченными пирамидами и конусами иногда удобно достроить их до полных пирамид и конусов: при нахождении объема пирамиды удобно достроить ее до призмы и т. д. В рассмотренной ранее задаче «В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить их длину, если радиус шара равен R» (стр. 210) весьма удобным оказалось достроить данную конфигурацию до правильной треугольной пирамиды, вписанной в шар.

Точно так же в задаче № 472 из задачника П. В. Стратилатова «На поверхности шара даны четыре точки на одинаковом расстоянии друг от друга. Определить углы между радиусами шара, проведенными в какие-либо два из них» целесообразно достроить данную конфигурацию до правильного тетраэдра, вписанного в шар.

В некоторых случаях полезно достроить данную фигуру до прямоугольного параллелепипеда, так как свойства этого многогранника хорошо известны. Рассмотрим, например, задачу № 368 из задачника П. В. Стратилатова.



Черт. 56.

Задача 10. Даны в пространстве три взаимно перпендикулярных луча, выходящих из одной точки, и вектор, исходящий из этой же точки. Доказать, что если вектор составляет с лучами углы α, β и γ, то справедливо соотношение: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Р е ш е н и е. Пусть BB_1, BA и BC есть данные взаимно перпендикулярные лучи, а BD_1 — данный вектор (черт. 56).

Проведением соответствующих плоскостей достроим

данную фигуру до прямоугольного параллелепипеда, в котором данный вектор будет диагональю, а отрезки лучей — ребрами.

Из чертежа легко находим:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BD_1}; \quad \cos\beta = \frac{BC}{BD_1}; \quad \cos\gamma = \frac{BB_1}{BD_1},$$

следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{AB^2 + BC^2 + BB_1^2}{BD_1^2}.$$

По свойству диагоналей прямоугольного параллелепипеда имеем: $AB^2 + BC^2 + BB_1^2 = BD_1^2$, следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{BD_1^2}{BD_1^2} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Введение вспомогательных неизвестных.

При решении многих задач приходится вычислять некоторые вспомогательные неизвестные величины, которые выражаются через данные величины иногда довольно громоздко, и учащиеся, стремясь оперировать с величинами, данными в условии задачи, выполняют трудные и совершенно ненужные преобразования. При таком использовании вспомогательных неизвестных теряются именно те качества (упрощение вычислений), ради которых вводятся вспомогательные неизвестные.

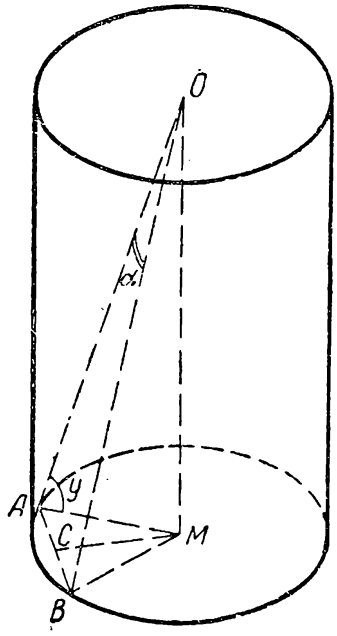
Мы приучаем учащихся пользоваться найденными вспомогательными неизвестными так, как они пользуются данными величинами и только после вычисления искомой в задаче величины подставлять значения вспомогательных неизвестных.

Задача 11. В основании цилиндра проведена хорда, равная стороне правильного n-угольника, вписанного в его основание. Если соединить концы этой хорды с центром другого основания отрезками прямых, то получится треугольник, площадь которого равна P, а угол при вершине равен α. Вычислить объем V данного цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть хорда AB есть сторона правильного n-угольника (черт. 57), $\angle AOB = \alpha$, а площадь тре-

угольника AOB равна P. Зная угол при вершине и площадь равнобедренного треугольника, легко найти боковые стороны треугольника, поэтому длину их примем за вспомогательное неизвестное. Итак, положим: $AO = BO = x$, тогда $P = \frac{x^2 \sin\alpha}{2}$ и

$$x = \sqrt{\frac{2p}{\sin\alpha}}.$$



Черт. 57.

Затем по теореме косинусов находим сторону AB:

$$AB^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha = 4x^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad AB = 2x\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Для нахождения радиуса R основания цилиндра проводим высоту MC равнобедренного треугольника MAB, тогда

$$\angle AMC = \frac{180^\circ}{n} \text{ и}$$

$$R = AM = \frac{AC}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Вводим вспомогательный угол: $\angle OAM = y$, тогда

$$\cos y = \frac{MA}{AO} = \frac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{x\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Находим высоту цилиндра: $H = OM = AO \cdot \sin y = x\sin y$.

Искомый объем:

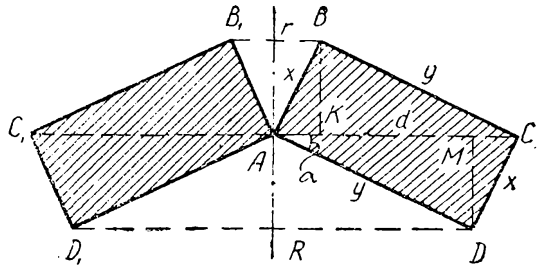
$$V = \pi R^2 H = \pi \frac{x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot x\sin y}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\pi \cdot 2P \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{2P} \cdot \sin y}{\sin\alpha \cdot \sin^2\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{\pi P \sin u}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{180^\circ}{n}} \sqrt{\frac{2P\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}} = \frac{\pi P \sin y}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{180^\circ}{n}} \sqrt{P \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

где $\cos y = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

Введение вспомогательных неизвестных приобретает особенно большое значение при решении задач на тела вращения, где оно становится почти обязательным.

Задача 12. Определить поверхность тела, полученного от вращения прямоугольника $ABCD$ (черт. 58) около оси, проходящей через его вершину A перпендикулярно диагонали AC, которая образует со стороной AD угол α и равна d.



Черт. 58.

Р е ш е н и е. Искомая поверхность есть арифметическая сумма поверхностей, которые описывают стороны прямоугольника:

$$S_{т.в.} = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA}.$$

Пользуясь вспомогательными неизвестными, обозначенными на чертеже, получим:

$$S_{т.в.} = \pi rx + \pi(r+d)y + \pi(d+R)x + \pi Ry = \pi x(r+d+R) + \\ + \pi y(r+d+R) = \pi(d+r+R)(x+y).$$

Затем мы советуем учащимся не спешить с вычислением введенных отрезков, а стремиться найти геометрические соотношения между ними (особенно между радиусами). Треугольники ABK и CMD равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $MC = AK = r$ и равенство $AM + MC = AC$ дает: $R + r = d$. Таким образом,

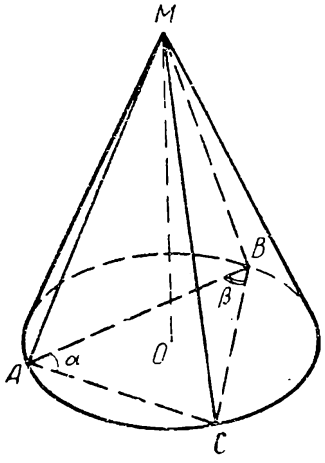
$$S_{\text{т. в.}} = \pi(d + d)(x + y) = 2\pi d(x + y).$$

Теперь находим x и y: $x = d\sin\alpha$; $y = d\cos\alpha$.
Окончательно имеем:

$$S_{\text{т.в.}} = 2\pi d^2(\sin\alpha + \cos\alpha) = 2\pi\sqrt{2}\,d^2\sin(45° + \alpha).$$

Нахождение отношений однородных величин.

Если в задаче одна из данных величин и искомая величина однородные, то решение таких задач значительно упрощается, если находить отношение этих однородных величин.



Черт. 59.

Задача 13. В конус вписана пирамида, объем которой V. В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β. Найти объем конуса.

Р е ш е н и е. Найдем отношение искомого объема $V_к$ к данному объему V (черт. 59).

$$\frac{V_к}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H} = \frac{\pi R^2}{S_{\text{осн}}} =$$

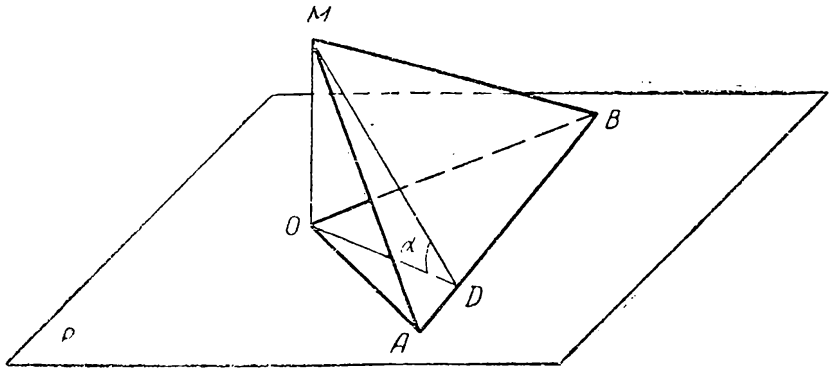
$$= \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}ab\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]} = \frac{2\pi R^2}{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\alpha\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)},$$

следовательно,

$$V_к = \frac{\pi V}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}.$$

Задача 14. Треугольник спроектирован на плоскость P, содержащую одну из его сторон. Доказать, что площадь проекции равна произведению площади треугольника на косинус угла между плоскостью треугольника и плоскостью P.



Черт. 60.

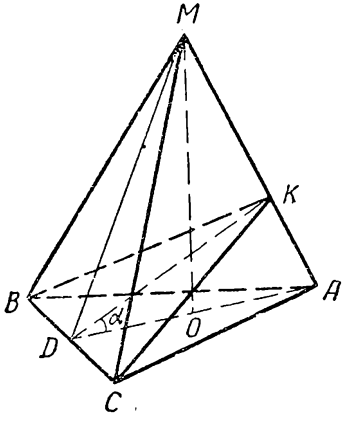
Р е ш е н и е. Пусть треугольник MAB (черт. 60) — данный, а треугольник OAB—его проекция на плоскость P. Проведем $MD \perp AB$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $OD \perp AB$, следовательно, угол MDO есть линейный угол двугранного, обозначим его через α. Площадь треугольника OAB (площадь проекции) обозначим через $S_{пр}$, а площадь треугольника MAB (площадь фигуры) через $S_{фиг}$. Находим отношение:

$$\frac{S_{пр.}}{S_{фиг.}} = \frac{\frac{1}{2} OD \cdot AB}{\frac{1}{2} MD \cdot AB} = \frac{OD}{MD} = \cos\alpha,$$

следовательно, $S_{пр.} = S_{фиг.} \cos\alpha$, что и требовалось доказать.

Задача 15. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC$. Высота пирамиды MO проходит через середину высоты AD основания. Через сторону BC проведена плоскость, перпендикулярная к боковому ребру MA; эта плоскость образует с основанием угол α. Найти объем отрезанной части пирамиды, содержащей вершину M, если объем другой отрезанной части равен V.

Р е ш е н и е. По построению $MO \perp$ пл. ABC; $AD \perp BC$; $AO = OD$ (черт. 61). $\triangle BKC$ — данное сечение, следовательно, $MA \perp$ пл. BCK. Из условия $AB = AC$ легко получаем, что $BK = CK$ и поэтому $KD \perp BC$ и $\angle KDA = \alpha$.



Черт. 61.

Для решения задачи найдем отношение искомого объема V_x пирамиды $MBCK$ к данному объему V пирамиды $ABCK$.

Примем за основания обеих пирамид $\triangle BKC$, тогда высоты будут соответственно MK и KA.

Имеем:

$$\frac{V_x}{V} = \frac{\frac{1}{3} S_{\triangle BCK} \cdot MK}{\frac{1}{3} S_{\triangle BCK} \cdot AK} = \frac{MK}{AK}.$$

Теперь выразим MK и KA через один и тот же отрезок DK. Из треугольника DKA имеем: $KA = DK \operatorname{tg}\alpha$.

Так как треугольник DMA равнобедренный, то $\angle MDA = \angle MAD = 90° - \alpha$; $\angle MDK = 90° - \alpha - \alpha = 90° - 2\alpha$; $MK = DK \operatorname{tg}(90° - 2\alpha) = DK \operatorname{ctg} 2\alpha$.

Находим отношение объемов:

$$\frac{V_x}{V} = \frac{DK \operatorname{ctg} 2\alpha}{DK \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$V_x = V \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha.$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ.

Решение каждой задачи на вычисление с параметрическими данными должно содержать в себе некоторое исследование, являющееся неотъемлемой частью самого ре-

шения. В самом деле, решить задачу на вычисление (в средней школе) — это значит установить определенную функциональную зависимость (обычно в виде некоторой формулы) между данными и искомыми величинами. Но, чтобы задать функцию, недостаточно указать закон соответствия (например, формулу), а нужно еще установить область ее определения.

Наше требование исследовать задачу мы формулируем учащимся так: решая задачу на вычисление, необходимо установить допустимые значения для параметров, при которых данная задача (а следовательно, и полученная функция) имеет смысл.

Если в задаче даны числовые значения для параметров, то, прежде чем находить числовое значение искомой величины, необходимо убедиться, что заданные числовые значения являются допустимыми и что, следовательно, задача с такими данными имеет решение.

Если такого исследования не проводить, то можно прийти к абсурду: вычислять объемы и поверхности тел, существование которых невозможно.

Рассмотрим, например, такую задачу:

Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды с плоским углом при вершине α и боковым ребром b. Вычислить искомую поверхность при $b = 10$ *см*, $\alpha = 72°18'$.

Решив задачу в общем виде, найдем: $S_{бок.} = 3\,b^2 \sin\alpha$.

Подставив числовые значения, получим:

$$S_{бок.} = 3 \cdot 100 \sin 72°18' = 285{,}5 \text{ см}^2.$$

Внешне как будто все хорошо. В действительности же полученное значение 285,5 *см*^{2} является фикцией. В самом деле, сумма плоских углов многогранного угла должна быть менее 360°, т. е. должно быть: $6\alpha < 360°$, откуда $\alpha < 60°$ и при $\alpha = 72°18'$ пирамида не существует.

Обучая учащихся исследованию стереометрических задач на вычисление с параметрическими данными, мы рекомендуем учащимся проводить исследование в три этапа.

1. Установить допустимые значения для параметров путем непосредственного рассмотрения условий задачи, чертежа и геометрических соотношений между элементами фигуры.

2. Используя полученные выводы, произвести исследование формулы, служащей для определения искомой

величины, и установить допустимые значения содержащихся в ней аргументов.

3. Если допустимые значения для параметров, полученные при исследовании формулы, находятся в более узких границах, чем их значения, полученные при первоначальном геометрическом исследовании (в пункте 1), то необходимо провести дополнительное рассмотрение геометрических соотношений данной фигуры с целью установления соответствия границ.

Можно ли обойтись без первого этапа? Нет. Во-первых, потому, что иногда исследование, проведенное на первом этапе, дает точные границы для значений параметров, и тогда остается только проверить, что при этих границах полученная формула имеет смысл.

Во-вторых, установление даже неточных границ для параметров может значительно сократить исследование формулы, освободив его от чисто формального рассмотрения различных случаев. Так, например, неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)>0$, вообще говоря, может выполняться в двух случаях:

$$1)\ \begin{cases}\cos(\alpha+\beta)>0;\\ \cos(\alpha-\beta)>0;\end{cases}\quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases}\cos(\alpha+\beta)<0;\\ \cos(\alpha-\beta)<0;\end{cases}$$

если же известно, что $0^\circ<\alpha<90^\circ$ и $0^\circ<\beta<90^\circ$, тогда $\cos(\alpha-\beta)>0$ и второй случай отпадает.

В-третьих, первоначальное геометрическое исследование дает те необходимые условия, при которых получают решение задачи.

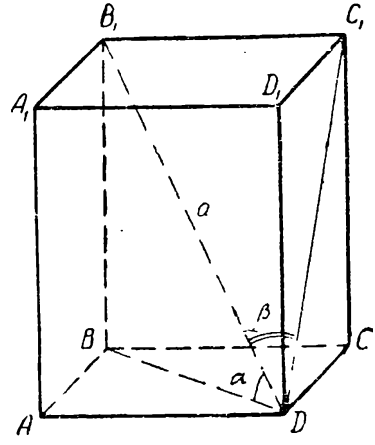
Можно ли обойтись без второго этапа исследования — исследования формулы. Нет. Разумеется, что очень часто геометрическое исследование сразу устанавливает точные границы для параметров, и в таком случае исследование формулы ничего нового не приносит. В этом случае исследование формулы может служить контролем. Но иногда установить геометрически точные границы для параметров бывает очень трудно, и тогда алгебраическое исследование подсказывает эти границы, облегчая поиски соответствующих геометрических соотношений. Приведем пример. Во многих классах мы предлагали учащимся следующую задачу:

В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная a, наклонена к основанию под углом α, а к боковой грани под углом β. Найти объем (черт. 62).

До решения задачи и исследования формулы ни один учащийся не смог установить, что $\alpha + \beta < 90°$. Решив задачу, учащиеся получили для объема выражение:

$$V = a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}.$$

Так как α и β — углы наклона прямой к плоскости, то, по определению, $0° < \alpha < 90°$ и $0° < \beta < 90°$, поэтому $|\alpha - \beta| < 90°$ и $\cos(\alpha - \beta) > 0$. Но тогда должно выполняться условие: $\cos(\alpha + \beta) > 0$ и $\alpha + \beta < 90°$. Только получив это условие, учащиеся догадывались, что в точке B_1 имеется трехгранный угол с плоскими углами $\angle DB_1B = 90° - \alpha$, $\angle DB_1C_1 = 90° - \beta$, $\angle BB_1C_1 = 90°$ и в силу свойств плоских углов трехгранного угла должно иметь место неравенство: $90° - \alpha + 90° - \beta > 90°$, откуда $\alpha + \beta < 90°$. Некоторые учащиеся замечали, что β как угол, образованный диагональю DB_1 с плоскостью грани DCC_1D_1, меньше угла $90° - \alpha$, образованного диагональю DB_1 с ребром DD_1 — прямой на этой плоскости.



Черт. 62.

Наконец, можно ли обойтись без третьего этапа — вторичного геометрического исследования (точнее, установления чисто геометрическим путем соотношений, полученных при алгебраическом исследовании). Да, если первые два этапа исчерпали исследование. Последнее имеет место, очевидно, тогда, когда границы, установленные при первоначальном геометрическом исследовании, совпадают с границами, полученными при аналитическом исследовании. Значение вторичного геометрического исследования заключается в том, чтобы выяснить конструктивные особенности данной фигуры.

Наш опыт показывает, что такое исследование не занимает много времени и если его проводить систематически (хотя и не для всех задач), то учащиеся успешно овладевают им.

В целесообразности изложенной выше методики нас убеждает и то, что, следуя ей, мы получали точные границы для параметров (т. е. условия не только необходимые, но и достаточные) во всех без исключения задачах, которые мы решали с учащимися в средней школе.

Более того, эта методика дала нам возможность обнаружить ошибки в решениях некоторых стереометрических задач; покажем это на следующих двух задачах, распространенных в школьной практике.

Задача 1*. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Два боковых ребра пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные φ, а грань, заключенная между ними, наклонена к основанию под углом α. Найти объем пирамиды.

Решив задачу, найдем:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{3} \sin \alpha \sin \varphi}{24 \sqrt{\sin (\alpha - \varphi) \sin (\alpha + \varphi)}}.$$

Исследование. Угол φ—угол прямой с плоскостью, по определению, острый, следовательно, $0° < \varphi < 90°$. Двугранный угол α должен, очевидно, удовлетворять соотношению $0° < \alpha < 180°$. Обращаясь теперь к полученной формуле для объема, мы видим, что объем будет выражаться действительным числом при условии

$$\sin (\alpha - \varphi) \sin (\alpha + \varphi) > 0.$$

Это последнее неравенство может иметь место, очевидно, в двух случаях.

Случай 1. $\begin{cases} \sin (\alpha - \varphi) > 0; \\ \sin (\alpha + \varphi) > 0. \end{cases}$

Из указанных неравенств для α и φ легко получаем: $0° < \alpha + \varphi < 270°$; $-90° < \alpha - \varphi < 180°$. Поэтому неравенство $\sin (\alpha + \varphi) > 0$ может быть выполнено только при $0° < \alpha + \varphi < 180°$, а неравенство $\sin (\alpha - \varphi) > 0$ — только при $0° < \alpha - \varphi < 180°$.

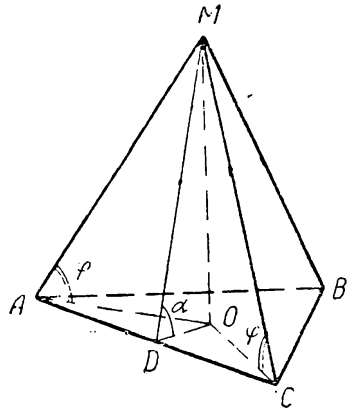
---

* Эта задача взята из брошюры Л. В. Кривлевой «Приложение тригонометрии к решению и исследованию геометрических задач» (стр. 28). В брошюре допустимые значения для параметров в этой задаче указаны не точно.

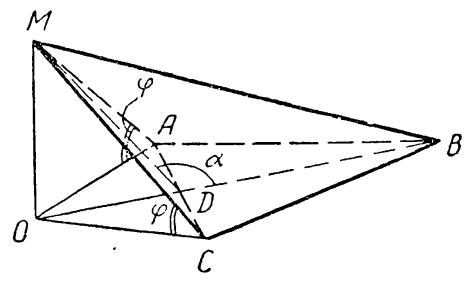
Таким образом, допустимые значения для углов α и φ определяются неравенствами: $0° < \varphi < 90°$; $0° < \alpha < 180°$; $\alpha + \varphi < 180°$; $\alpha > \varphi$.

Этим неравенствам могут удовлетворять пирамиды двух видов.

Для пирамид первого вида (черт. 63) имеем: $0° < \alpha \leqslant 90°$ и неравенство $\alpha + \varphi < 180°$, очевидно, выполняется. Условие $\alpha > \varphi$ в этом случае также легко получить непосредственно. Из треугольников AOM и DOM имеем: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{DO}{OM}$; $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{AO}{OM}$.



Черт. 63.



Черт. 64.

Но из прямоугольного треугольника AOD имеем: $DO < AO$, следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\varphi$ и поэтому $\alpha > \varphi$.

Для пирамид другого вида (черт. 64) имеем: $90° < \alpha < 180°$. Так как в этом случае α — тупой угол, а φ — острый, то очевидно, что $\alpha > \varphi$. Кроме того, из треугольников MAO и MOD имеем: $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{OA}{OM}$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{OD}{OM}$ и так как $OA > OD$, то $\operatorname{ctg}\varphi > \operatorname{ctg}(180° - \alpha)$, откуда $\varphi < 180° - \alpha$ (углы φ и $180° - \alpha$ — острые углы), т. е. $\alpha + \varphi < 180°$.

Случай 2. $\begin{cases} \sin(\alpha - \varphi) < 0; \\ \sin(\alpha + \varphi) < 0. \end{cases}$

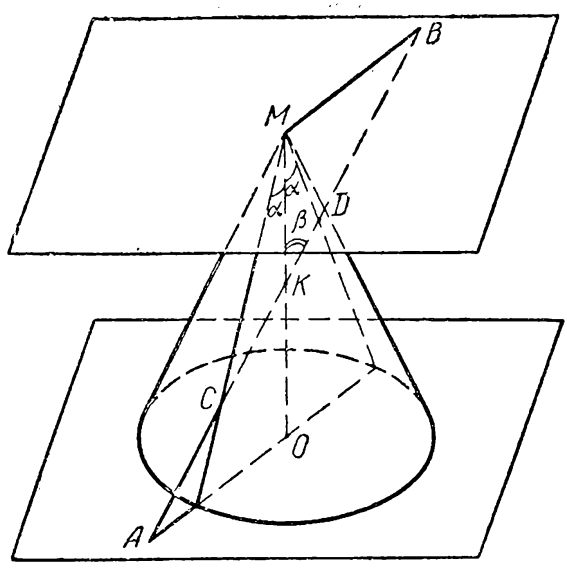
Так как $0° < \alpha + \varphi < 270°$, то условие $\sin(\alpha + \varphi) < 0$ может быть выполнено, если $180° < \alpha + \varphi < 270°$. Мы уже видели, что $-90° < \alpha - \varphi < 180°$, поэтому условие

$\sin(\alpha-\varphi)<0$ выполняется, если $-90^\circ<\alpha-\varphi<0^\circ$, откуда $\alpha<\varphi$. Но $\varphi<90^\circ$, поэтому $\alpha<90^\circ$ и тогда $\alpha+\varphi<180^\circ$, что противоречит ранее полученному условию $\alpha+\varphi>180^\circ$. Полученное противоречие показывает, что второй случай невозможен.

Таким образом, в рассмотренной задаче допустимые значения параметров определяются условиями:

$$0^\circ<\varphi<90^\circ;\ 0^\circ<\alpha<180^\circ;\ \alpha+\varphi<180^\circ;\ \alpha>\varphi.$$

Задача 2. Между двумя параллельными плоскостями заключен конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину оси проведена прямая, составляющая с ней угол β и пересекающая боковую поверхность конуса в двух точках. Отрезок этой прямой между параллельными плоскостями равен a. Определить отрезок, заключенный внутри конуса.



Черт. 65.

Эта задача содержится в задачнике по тригонометрии Н. Рыбкина (§ 20, № 6), в задачнике А. И.-и Н. И. Худобиных (№ 1858), в задачнике П. В. Стратилатова (№ 451) и во многих других книгах. И во всех этих книгах дан к этой задаче по существу неточный ответ.

Для искомого отрезка CD (черт. 65) дается ответ:

$$CD = \frac{a \sin 2\alpha \sin 2\beta}{4 \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}.$$

Исследование. Рассматривая чертеж, легко установить, что углы α и β должны удовлетворять таким неравенствам: 1) $0° < 2\alpha < 180°$, так как α — острый угол прямоугольного треугольника; 2) $0° < \alpha + \beta < 180°$, так как α и β — углы одного треугольника; 3) $\beta - \alpha > 0$, так как угол β — внешний относительно треугольника, в котором не смежным с ним является угол α.

Если эти условия выполняются, то $\sin(\beta + \alpha) > 0$; $\sin(\beta - \alpha) > 0$; $\sin 2\alpha > 0$. Отсюда следует, что выражение для CD будет положительным только в том случае, если $\sin 2\beta > 0$, т. е. $2\beta < 180°$ и $\beta < 90°$.

Между тем совершенно очевидно, что угол β между двумя прямыми может быть и тупым, т. е. $0° < \beta < 180°$. Это противоречие указывает на наличие ошибки в решении задачи.

В самом деле, в процессе решения задачи приходится находить отрезок KO из прямоугольного треугольника AOK, в котором $AK = \frac{a}{2}$. Если β — острый угол, то $\angle MKB = \angle AKO = \beta$ и $KO = AK \cos\beta = \frac{a}{2} \cos\beta$. Если же β — тупой угол, то $\angle MKA = \beta$ и тогда $\angle AKO = 180° - \beta$, следовательно, $KO = AK \cos(180° - \beta) = -\frac{a}{2} \cos\beta$.

Правильный ответ к этой задаче будет такой:

$$CD = \frac{a \sin 2\alpha \sin 2\beta}{4 \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}, \text{ если } 0° < \beta < 90° \text{ и}$$

$$CD = -\frac{a \sin 2\alpha \sin 2\beta}{4 \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}, \text{ если } 90° < \beta < 180°.$$